
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01215727 7





Lehrbuch

der

Analytischen Geometrie.

Zweiter Teil:

Analytische Geometrie des Raumes.

Von

Dr. O. Dziobek

weil. Geheimer Regierungsrat
Professor an der Militärtechnischen Akademie
und Dozent für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule
zu Charlottenburg bei Berlin.

Mit 36 Figuren im Text.

Zweite Auflage.

Braunschweig 1921.
Verlag von A. Graffs Buchhandlung.

Druck von Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig

Vorwort zur ersten Auflage.

Verschiedene Umstände haben den Druck dieses zweiten Bandes, welcher die analytische Geometrie des Raumes enthält, beträchtlich verzögert, so daß er über ein halbes Jahr später erscheint, als ursprünglich vom Verfasser vorgesehen worden war.

Da die Gesichtspunkte hier im wesentlichen dieselben gewesen sind, welche bei der Abfassung des ersten Teiles maßgebend waren, so kann hierüber auf das dortige Vorwort verwiesen werden. Auch die Anordnung und Behandlung des Stoffes ist in beiden Teilen ziemlich die gleiche, nur daß hier mit einem Leser gerechnet werden mußte, der die analytische Geometrie der Ebene bereits kennt und sich so bereits eine raschere Auffassung der Begriffe und Methoden dieser eigenartigen mathematischen Wissenschaft angeeignet hat.

Wenngleich der Inhalt des hier Gebotenen — selbstverständlich immer unter Berücksichtigung der Zwecke, welche der Verfasser im Vorwort zum ersten Teil auseinandergesetzt hat — weder hinter dem zurückbleibt, was der Durchschnitt der Lehrbücher zu bringen pflegt, noch über dasselbe hinausgeht, so wird man doch zahlreiche Ausnahmen finden. Zuerst ist hier die sehr eingehende analytische Behandlung der geraden Linie zu nennen, der nicht weniger als vier Paragraphen des zweiten Abschnittes gewidmet sind. In Anbetracht der Wichtigkeit, welche der geraden Linie in den Anwendungen so sehr zukommt, sind dort sogar die Strahlenkomplexe, insbesondere diejenigen ersten Grades, also Gebilde aufgenommen,

welche in vielen anderen Lehrbüchern überhaupt nicht erwähnt werden. Daß diese Gebilde höhere Ansprüche an Raumanschauung stellen, muß zugegeben werden; aber muß nicht andererseits gerade der Ingenieur und der Techniker darauf bedacht sein, ihnen zu genügen, da er häufig mit so verwickelten räumlichen Verhältnissen zu tun hat, wie sie nur selten in der reinen Mathematik ersonnen werden?

Dann ist auch hier auf die projektive Seite der analytischen Geometrie mehr Rücksicht genommen worden, als ihr meist zuteil wird. Allerdings nicht in dem Umfange, wie im ersten Bande, weil das Buch nicht zu dick werden sollte und die projektiven Prinzipien überdies den Vorzug haben, daß sie meist ohne jede Anstrengung von der Ebene auf den Raum erweitert werden können.

Der erste Abschnitt enthält die Grundprinzipien und Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes überhaupt. Also z. B. Formeln für Richtungen, Winkel, Längen, Flächen, Volumina, für Transformation der Koordinaten, ferner den Begriff der Gleichung einer Fläche, sowie der Gleichungen einer Kurve. Der zweite Abschnitt behandelt die Gebilde ersten Grades, also Ebene, Gerade, Punktreihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel, Strahlen- und Ebenenbündel. Der dritte und vierte Abschnitt haben hauptsächlich die Theorie der Flächen zweiten Grades zum Gegenstande. Sie enthalten unter anderem eine sehr gründliche Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades und eine weiter ausgeführte Darstellung der schönen Theorie der konfokalen Flächen. Der Schlußparagraph gibt in allgemeinen Umrissen gehaltene Betrachtungen über projektive Erzeugung von Kurven und Flächen, über Büschel und Scharen und über projektive Verwandtschaften.

Die jedem Paragraphen angehängten Übungsaufgaben sind meist nicht leicht und sollen es auch nicht sein. Einige

verlangen lästige numerische Rechnungen, an welche sich aber jeder zu gewöhnen hat, der in die Lage kommen kann, mathematische Formeln auf einen bestimmten Fall anzuwenden. Andere wieder verlangen reifliches Nachdenken zur Auffindung eines geschickten Ansatzes oder größere analytische Umformungen usw. Deshalb sind die Lösungen im Anhange auch etwas ausführlicher gegeben worden, als im ersten Teil.

Möge dieser zweite Teil der gleichen Vorzüge teilhaftig befunden werden, welche die Kritik der Fachblätter dem ersten in so reichlichem Maße zuerkannt hat!

Charlottenburg, den 23. Februar 1902.

Prof. Dr. O. Dziobek.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die zweite, nach dem Ableben des Verfassers erscheinende Auflage, enthält nur unwesentliche, meist stilistische Änderungen. Einzelne Rechnungen sind aus dem eigentlichen Buch in die Aufgaben verwiesen worden, um den Lernenden, der die Grundprinzipien erfassen will, nicht gleich zu Beginn zu sehr mit Rechnung zu belasten.

Charlottenburg, den 3. Oktober 1921.

W. Dziobek.



Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt. § 1—6.

Zweiter Abschnitt. § 7—12.

Dritter Abschnitt. § 13—18.

Vierter Abschnitt. § 19—22.

Anhang.

Erster Abschnitt.

§ 1 bis § 6.

§ 1.

Das rechtwinklige Koordinatensystem im Raume. Grundformeln.

Das rechtwinklige Koordinatensystem wurde sehr bald aus der Ebene, in die es Cartesius eingesetzt hatte, in den Raum übertragen, da hierbei gar keine Schwierigkeiten zu überwinden waren und der unschätzbare Vorteil einer einheitlichen Lagenbestimmung die kleine Mühe überreichlich lohnen mußte.

Es werden bei der Bildung eines räumlichen rechtwinkligen Koordinatensystems irgend drei aufeinander senkrechte und allseitig unbegrenzt vorgestellte Ebenen (Fig. 1) als Koordinatenebenen angenommen. Ihre drei Schnittlinien, in deren jeder man noch die Positiv- und Negativrichtung nach Belieben wählen kann, sind die Koordinatenachsen, die x-Achse, die y-Achse, die z-Achse. Die Ebenen heißen nach den beiden in ihnen liegenden Achsen die yz-, die zx- und xy-Ebene. Der Schnittpunkt der Ebenen und Achsen ist der Anfangspunkt.

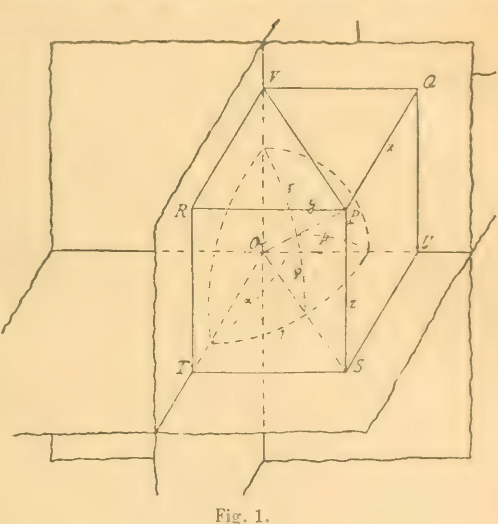


Fig. 1.

Unter Koordinaten eines beliebigen Punktes P im Raume versteht man dann die drei Lote:

$$QP = x, \quad RP = y, \quad SP = z,$$

von P auf die yz-, die zx- und die xy-Ebene, nachdem sie durch die Längeneinheit in Zahlen ausgedrückt worden sind und diese Zahlen die Vorzeichen $+$ oder $-$ erhalten haben, je nachdem die Richtungen von Q bzw. von R bzw. von S nach P mit den Positiv- oder Negativrichtungen der x- bzw. der y- bzw. der z-Achse übereinstimmen. Der Punkt P wird dann $P(xyz)$ benannt; seine Koordinaten sind hiernach, geometrisch betrachtet, Längen, denen die eine oder die andere von zwei entgegengesetzten Richtungen zukommt, analytisch aber sind sie algebraische Zahlen, deren absolute Werte diesen Längen, deren Vorzeichen diesen Richtungen entsprechen.

Bemerkungen a) bis i). a) In Fig. 1 sind bei aufrechter Stellung des Buches die $+x$-Achse vom Anfangspunkt nach vorn (d. h. auf den Leser zu), die $+y$-Achse nach rechts, die $+z$-Achse nach oben, also die negativen Richtungen nach hinten, links und unten vorzustellen. Diese Übereinstimmung der Achsenrichtungen mit den Hauptrichtungen des aufrechten menschlichen Körpers ist zwar durchaus nicht notwendig, erleichtert aber doch namentlich dem Anfänger die Anschauung. b) Man beachte das dem Punkte P zugehörige Rechtflach $PRTSQVOU$, in welchem jede Koordinate viermal als Kante vorkommt. c) Die Figuren in diesem Buch sind fast alle als schiefe Projektionen der räumlichen Gebilde auf die yz-Ebene — die Ebene des Papiers — so gezeichnet worden, daß die Projektion der $+x$-Achse mit der $+y$-Achse einen Winkel von 120^0 und mit der $+z$-Achse von 150^0 bildet. Die y und z erscheinen also in ihrer wirklichen Richtung und Größe; um aber wenigstens die Größe der x richtig wiederzugeben, kann man annehmen, daß der projizierende Strahl gegen die $-x$-Achse um 45^0 geneigt sei. Nur gelegentlich (z. B. Fig. 10, S. 66) wurde diese Neigung so gewählt, daß die x-Koordinaten eine Verkürzung auf die Hälfte ihrer wahren Länge erfahren (um die unschöne Abplattung des Profils der Kugel zu verringern, ohne die perspektivische Wirkung der Schiefe zu beeinträchtigen).

d) Selbstverständlich würde man auch drei schief aufeinanderstehende Ebenen zu Koordinatenebenen machen können [siehe I, § 4 *)]. Aber nur selten liegt ein Bedürfnis zur Einführung solcher schiefwinkligen Koordinatensysteme vor. Wohl aber erweisen sich beide, recht- und schiefwinklige, für die analytische Behandlung rein projektiver Eigenschaften als zu eng und müssen dann zu den allgemeinen Tetraederkoordinaten umgestaltet werden, als den Erweiterungen der Dreieckskoordinaten in der Ebene (siehe I, § 21). Da aber die zugehörigen Entwickelungen und Betrachtungen leicht von dort übertragbar sind, so ist unbeschadet gelegentlicher nachdrücklicher Hinweise auf projektives Gebiet von den Tetraederkoordinaten kein Gebrauch gemacht worden. e) Die Koordinatenebenen teilen den Raum in acht Oktanten mit den acht möglichen Kombinationen der Vorzeichen, welche den absoluten Werten der Koordinaten anhaften. Man pflegt sie in zwei Gruppen zu sondern, eine mit einer geraden, die andere mit einer ungeraden Anzahl negativer Vorzeichen:

Erste Gruppe

x	y	z
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Zweite Gruppe

x	y	z
−	−	−
−	+	+
+	−	+
+	+	−

Man achte nun darauf, wie je zwei Oktanten derselben Gruppe längs einer Kante (der $+x$-Achse, der $-x$-Achse usw.) zusammenstoßen, während zwei Oktanten aus verschiedenen Gruppen entweder Scheiteloktanten sind und nur den Anfangspunkt gemeinsam haben oder zusammen einen räumlichen Quadranten bilden. f) Die x-Achse wird auch erste, die y-Achse zweite, die z-Achse dritte Achse genannt, wobei man stillschweigend den Zyklus (xyz) setzt. In Fig. 1 erscheint die Drehung in der xy-Ebene der $+x$- nach der $+y$-Achse um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeiger, wenn sie von einem Punkt der $+z$-Achse (von oben also) betrachtet wird. Das

*) Bei Zitierung des ersten Teiles dieses Lehrbuches wird dieser I genannt.

gleiche gilt, dem Zyklus entsprechend, von der Drehung der $+y$- nach der $+z$-, der $+z$- nach der $+x$-Achse um 90°, gesehen von einem Punkte der $+x$-Achse bzw. der $+y$-Achse. Nimmt man aber z. B. die z-Achse nach unten positiv, ohne die Positivrichtungen der x und y zu wechseln, so kehrt sich dieser Drehungssinn um. Da er aber andererseits bei jeder Verschiebung und Drehung des Koordinatensystems (wobei dasselbe wie ein fester oder starrer Körper anzusehen ist) erhalten bleibt, so wird man niemals zwei Koordinatensysteme mit entgegengesetztem Drehungssinn so zur Deckung bringen können, daß die Positivrichtung der ersten Achse des einen Systems mit der Positivrichtung der ersten Achse des anderen Systems und ebenso die Positivrichtungen der zweiten und der dritten Achse zusammenfallen. Koordinatensysteme mit gleichem Drehungssinn mögen kongruent, mit entgegengesetztem symmetrisch heißen. Da es aber, wie vorhin gezeigt, so einfach ist, den Drehungssinn umzukehren, so sollen bei den künftigen Transformationen, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt, nur kongruente Systeme vorausgesetzt werden, und zwar nach Fig. 1 nur solche, bei denen der genannte Drehungssinn entgegengesetzt zur Uhr ist*). g) Setzt man $z = 0$, so beschränkt man sich auf Punkte in der xy-Ebene und kehrt zu dem ebenen Koordinatensystem zurück. h) Weil im Raume zur Bestimmung der Lage eines Punktes drei voneinander unabhängige Koordinaten x, y, z nötig sind, so wird er dreidimensional genannt. Der Annahme eines vierdimensionalen oder ganz allgemein eines n-dimensionalen Raumes läßt sich schlechterdings kein analytisches Hindernis entgegensetzen, wenngleich die Anschauung gänzlich ermangelt. Es gibt daher in diesem Sinne eine n-dimensionale analytische Geometrie, gleich als ob der zugehörige n-dimensionale Raum wirklich der sinnlichen Wahrnehmung der Körperwelt zugrunde läge. Daß dies, sobald $n > 3$, nicht der Fall, tut der inneren Widerspruchslosigkeit und Wahrheit der analytischen Entwickelungen keinen Abbruch. i) Es mögen hier noch diejenigen (nicht euklidischen) Raumformen flüchtig erwähnt werden, bei welchen manche

*) Dies ist bei allen Formeln zu beachten, wo ein Drehungssinn gedeutet werden soll.

Axiome, z. B. das Parallelenaxiom (durch jeden Punkt nur eine Parallele zu einer gegebenen Geraden) in Wegfall kommen. Bei derartigen Betrachtungen erscheint die analytische Geometrie des Raumes, d. h. unseres, der wirklichen Anschauung entsprechenden Raumes als ein besonderer Fall der sogenannten allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, auf die hier nur eben hingedeutet werden kann.

Aufgabe I. Gegeben $P(x, y, z)$. Gesucht Länge des Radiusvektor $OP = r$.

Bezeichnet man (Fig. 1) OS, also die Projektion von r auf die xy-Ebene, mit ϱ, so folgt aus den rechtwinkligen Dreiecken OTS und OSP

$$\varrho^2 = x^2 + y^2, \qquad r^2 = \varrho^2 + z^2,$$

also

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1}$$

Bemerkung: r wird als Radiusvektor gewöhnlich absolut, ohne Vorzeichen genommen.

Aufgabe II. Gegeben $P(x, y, z)$. Gesucht Richtung des Radiusvektor OP.

Lösung: Selbstverständlich ist erst ein für allemal und grundsätzlich zu erläutern, wie überhaupt Richtungen im Raume festzulegen sind. In der Ebene reichte hierzu ein Winkel aus, der sogenannte Richtungswinkel, beziehungsweise seine trigonometrische Tangente, die Richtungskonstante oder der Richtungskoeffizient m (siehe I, § 2). Dieser Richtungswinkel war der Winkel, welchen die zu ermittelnde Richtung mit der Richtung der $+x$-Achse bildet.

Im Raum aber werden für jede Richtung drei Richtungswinkel eingeführt, nämlich die drei Winkel α, β, γ, welche sie mit der $+x$-Achse, der $+y$-Achse, der $+z$-Achse bildet. Also:

$$\measuredangle TOP = \alpha, \quad \measuredangle UOP = \beta, \quad \measuredangle VOP = \gamma.$$

Insofern sind diese drei Richtungswinkel dem einen Richtungswinkel in der Ebene analog; es macht aber doch einen wesentlichen Unterschied aus, daß dort der Richtungswinkel nur in einer Ebene lag, hier aber der Winkel α, ebenso wie

β und γ in jeder durch die x-Achse bzw. y- und z-Achse gehenden Ebene liegen kann. Man kann daher auch nicht ohne weiteres von dem Sinn sprechen, in welchem z. B. die $+x$-Achse um den Winkel α gedreht werden muß, da hierzu erst anzugeben wäre, von welcher Seite der Ebene des Winkels α diese Drehung betrachtet wird.

Die drei Winkel α, β, γ werden daher konkav und positiv, also von 0^0 bis $+180^0$ angesetzt. Man findet für sie aus der Fig. 1 sofort die Formeln:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

also 2)

$$\sin\alpha = +\frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\sin\beta = +\frac{\sqrt{z^2+x^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\sin\gamma = +\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

[Die Sinus werden nach der eben getroffenen Vereinbarung positiv.]

Aus 2) folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Daher:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad 3)$$

Es wird sich bald herausstellen, daß bei Richtungswinkeln nicht der trigonometrischen Tangente, wie in der Ebene, sondern dem Kosinus der Vorzug zu geben ist. Man spricht daher auch kurz von den drei Richtungskosinus einer Richtung. Die Formel 3) kann daher auch so ausgedrückt werden:

Die Summe der Quadrate der drei Richtungskosinus ist $= 1$.

Bemerkungen a) bis i) zu Aufgabe II. a) Nach Formel 3) könnte ein Richtungswinkel eliminiert werden, indem man ihn durch die anderen ausdrückt, z. B.:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta}. \tag{3a}$$

Es wird aber meist davon Abstand genommen, vornehmlich zur Wahrung der Symmetrie; dann aber auch, weil das doppelte Vorzeichen der Wurzel anzeigt, daß zu gegebenen Werten von α und β zwei supplementäre Werte von γ gehören. Und in der Tat: Wenn man die xy-Ebene als Spiegel ansieht, in welcher die Richtung OP gespiegelt wird, so bleiben α und β offenbar unverändert, während γ in sein Supplement $180^0 - \gamma$ übergeht, also $\cos\gamma$ sein Vorzeichen wechselt. Man behält daher lieber die Richtungswinkel alle drei bei und benutzt dann die Gleichung 3) gelegentlich zur Vereinfachung und Umformung. b) Bei Vertauschung irgend einer Richtung mit ihrer entgegengesetzten verwandeln sich die Richtungswinkel in ihre Supplemente und die Richtungskosinus wechseln ihre Vorzeichen. Faßt man also diese beiden Richtungen zu der einen Richtung einer unbegrenzten Geraden im Raume zusammen (vgl. I, § 2), so bleiben zwar nicht die Kosinus selbst, aber doch ihre Verhältnisse $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$ eindeutig.

Aber auch umgekehrt. Wenn diese Verhältnisse gegeben sind durch eine Proportion:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = m : n : p, \tag{4}$$

so sind damit die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden bestimmt. Denn aus 3) folgt dann sofort:

$$\cos\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\pm\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{5}$$

c) Setzt man in 2) $r = 1$, so folgt, daß die Richtungskosinus auch als Koordinaten eines Punktes P angesehen werden können, der auf der Richtung im Abstande $= 1$ vom Anfangspunkt liegt. Und da sich allgemein aus 2) ergibt:

$$x : y : z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \tag{2a}$$

so stehen die Koordinaten aller Punkte, welche auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden liegen, in demselben

Verhältnis zueinander. d) Liegt die Richtung in einer Koordinatenebene, so ist ein Richtungswinkel $= 90^0$, der zugehörige Kosinus also $= 0$, z. B. für die yz-Ebene: $\cos \alpha = 0$. Dann ergänzen sich β und γ, falls die Richtung in dem Quadranten zwischen $+y$ und $+z$ liegt, zu 90^0 und für die anderen Quadranten ist $\beta - \gamma = +90^0$, oder $\beta + \gamma = 270^0$. Also immer: $\cos \gamma = + \sin \beta$. Die Gleichung 3) gibt dann einfach:

$$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1, \tag{3b}$$

und so kann man auch 3) ansehen als Erweiterung der trigonometrischen Formel 3 b) auf drei zueinander senkrechte Achsen im Raume.

Für die $+x$-Achse ist

$$\alpha = 0, \ \beta = \gamma = 90^0, \ \text{also} \ \cos \alpha = +1, \ \cos \beta = \cos \gamma = 0.$$

Für die $-x$-Achse ist

$$\alpha = 180^0, \ \beta = \gamma = 90^0, \ \text{also} \ \cos \alpha = -1, \ \cos \beta = \cos \gamma = 0 \tag{6}$$

usw. e) Endlich sei hier *ausdrücklich* und ein für allemal bemerkt, daß man die Begriffe Richtungswinkel und Richtungskosinus auf alle geraden Linien im Raume ausdehnen und nicht auf solche beschränken soll, welche durch den Anfangspunkt gehen. Eine beliebige Gerade ist im allgemeinen zu den Achsen *windschief*; sie bildet aber mit ihnen die gleichen Winkel wie die Parallele durch den Anfangspunkt. Man legt daher allen *parallelen Richtungen* im Raume *dieselben* Richtungswinkel und *dieselben* Richtungskosinus bei. f) Für analytisch geometrische Entwickelungen ist die eben auseinandergesetzte Methode zur Feststellung von Richtungen ganz besonders ihrer Symmetrie wegen geeignet. Sie hat deshalb hier mit Recht die erste Stelle erhalten, trotzdem es noch eine andere, vor mehr als zweitausend Jahren ersonnene, eindeutige Richtungsbestimmung durch nur *zwei* Winkel gibt, welche man in der Astronomie, der Geographie, der Geodäsie usw. beinahe ausschließlich anwendet, aber auch in vielen Zweigen der Mechanik und Physik (z. B. in den Problemen der Drehung und des räumlichen Pendels), kurz überall bevorzugt, wo durch die Aufgabe von vornherein **eine** Richtung vor allen anderen ausgezeichnet ist.

Diese Richtung sei als z-Achse genommen worden, etwa Richtung der Erdachse ($+$ nach Norden), so daß die xy-Ebene

als Äquatorebene zu betrachten ist. Außerdem sei die Ebene des Anfangs- oder Nullmeridians zur xz-Ebene gemacht worden. Dann ist die Ebene (Fig. 1) $OVPS$ Meridianebene von P. Die Winkel

$$\measuredangle TOS = l, \quad \measuredangle SOP = \varphi$$

entsprechen somit der geographischen Länge und der geographischen Breite. l möge hier aber nur östlich, d. h. im Sinne der Drehung der $+x$- zur $+y$-, $-x$-, $-y$-Achse und zurück zur $+x$-Achse von 0^0 zu 90^0, 180^0, 270^0 bis 360^0 gerechnet werden*). φ dagegen soll nach der positiven Seite (nach Norden) von 0^0 bis $+90^0$ und nach der negativen von 0^0 bis -90^0 gehen. g) Um die Brücke von den analytisch-geometrischen Richtungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ zu diesen beiden Winkeln l und φ zu schlagen, benutze man die beiden rechtwinkligen Dreiecke TOS und OSP. Sie ergeben:

$$x = \varrho \cdot \cos l, \quad y = \varrho \cdot \sin l, \quad \varrho = r \cdot \cos\varphi, \quad z = r \cdot \sin\varphi.$$

Daher nach Elimination von ϱ:

$$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos l, \quad y = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin l, \quad z = r \cdot \sin\varphi. \qquad 7)$$

Nun folgt aus 2):

$$x = r \cdot \cos\alpha, \quad y = r \cdot \cos\beta, \quad z = r \cdot \cos\gamma. \qquad 7\text{a})$$

Daher:

$$\cos\alpha = \cos\varphi \cdot \cos l, \quad \cos\beta = \cos\varphi \cdot \sin l, \quad \cos\gamma = \sin\varphi, \qquad 8)$$

womit sofort der Übergang von φ und l zu α, β und γ hergestellt ist.

Daß die letzte Gleichung: $\cos\gamma = \sin\varphi$ richtig ist, lehrt auch ein Blick auf die Fig. 1, welche zeigt, daß γ und φ Komplementwinkel sind (γ = Abstand vom Pol), daß also:

$$\gamma + \varphi = 90^0, \quad \gamma = 90^0 - \varphi, \quad \varphi = 90^0 - \gamma. \qquad 9)$$

Die umgekehrte Transformation von α, β und γ zu φ und l vermitteln nach 8) und 9) die Formeln:

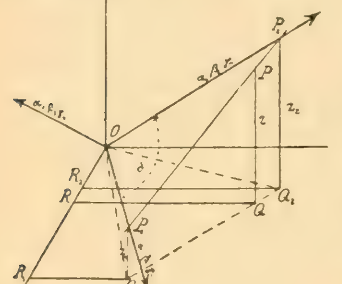
$$\varphi = 90^0 - \gamma, \ \cos l = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \ \sin l = \frac{\cos\beta}{\sin\gamma}, \ \operatorname{tg} l = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}. \qquad 8\text{a})$$

---

*) In der Geographie ist es leider immer noch üblich, die Länge nach Ost und West um je 180^0 zu zählen, während der Astronom die Rektaszensionen und der Geodät die Azimute nur in einem Sinne von 0^0 bis 360^0 nimmt.

h) Die Lage der fünf Winkel α, β, γ, l, φ zueinander gewinnt übrigens an Deutlichkeit, wenn sie auf einer Kugel um O als Mittelpunkt — man denke an Erd- oder Himmelskugel —, deren Radius $= 1$ gesetzt werde, durch Bögen größter Kreise dargestellt werden. Man sieht dann, daß die beiden ersten Formeln 8) auch durch Anwendung des sogenannten pythagoreischen Lehrsatzes für das sphärische rechtwinklige Dreieck entstehen. i) Es mag noch erwähnt werden, daß r, φ, l auch räumliche Polarkoordinaten von P heißen. Der Übergang von ihnen zu den rechtwinkligen Koordinaten geschieht durch die Formeln 7).

Aufgabe III. Gegeben zwei Punkte $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$, $P_2(x_2\, y_2\, z_2)$. Zu ermitteln die Entfernung $r = P_1 P_2$ und die Richtung von P_1 nach P_2 durch die Winkel α, β, γ.


Fig. 2.

Lösung (Fig. 2): Man verschiebe das Koordinatensystem parallel mit sich selbst so, daß der neue Anfangspunkt mit einem der Punkte, etwa P_1 zusammenfällt. Dann werden die Koordinaten von P_2:

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1, \quad z_2 - z_1$$

(sie heißen auch relative Koordinaten von P_2 in bezug auf P_1), und die Formeln 1) und 2) ergeben nun sofort:

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{10}$$

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{r}, \tag{11}$$

also auch die überaus wichtige Proportion zwischen den drei Kosinus

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1, \tag{11a}$$

d. h. die Richtungskosinus einer durch zwei Punkte im Raume gehenden Richtung verhalten sich wie die Differenzen der zugehörigen Koordinaten. (Vgl. I, § 5.)

Aufgabe IV. Gegeben irgend zwei Richtungen $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ und $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2$ im Raume. Gesucht der von ihnen gebildete Winkel δ.

Lösung: Man ziehe (am einfachsten) durch den Anfangspunkt zwei Gerade mit den gegebenen Richtungen und nehme auf jeder irgendwo einen Punkt $P_1\ (x_1 y_1 z_1)$ bzw. $P_2\ (x_2 y_2 z_2)$ an (Fig. 2). Der Winkel δ möge, wenn nichts weiter gesagt, konkav und ohne Vorzeichen genommen werden. Dann ist nach dem Kosinussatz für ebene Dreiecke:

$$\cos\delta = \frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2\, r_1 r_2}$$

oder nach 1) und 10):

$$\cos\delta = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}{2\, r_1 r_2}.$$

Nach Zusammenziehen des Zählers wird die Formel viel einfacher:

$$\cos\delta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2} + \frac{z_1}{r_1} \cdot \frac{z_2}{r_2} \qquad 12)$$

oder endlich nach 2):

$$\cos\delta = \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2. \qquad 13)$$

Bemerkungen a) bis f) zu Aufgabe IV. a) Um diese überraschend einfache und so wichtige Formel 13) zu prüfen, lasse man die beiden Richtungen zusammenfallen. Es wird dann $\delta = 0$, $\cos\delta = 1$ und man erhält

$$1 = \cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1,$$

wie es sein muß nach 3).

Oder man lasse die zweite Richtung mit der $+x$-Achse zusammenfallen, so folgt sofort nach 6): $\cos\delta = \cos\alpha_1$, d. h. $\delta = \alpha_1$, usw. b) Führt man nach 8) in die Formel 13) statt der Winkel α, β, γ die Winkel l und φ ein, oder behält noch besser $\gamma = 90^0 - \varphi$ bei, wodurch 8) die Gestalt erhält:

$$\cos\alpha = \sin\gamma \cdot \cos l, \quad \cos\beta = \sin\gamma \cdot \sin l,$$

so folgt:

$$\cos\delta = \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \cos l_1 \cdot \cos l_2 + \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \sin l_1 \cdot \sin l_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2,$$

d. h.

$$\cos\delta = \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 + \sin\gamma_1 \cdot \sin\gamma_2 \cdot \cos(l_1 - l_2). \qquad 14)$$

Diese Gleichung ist offenbar nichts anderes als der Ausdruck für den Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie, wie man sofort erkennt, wenn γ_1, γ_2 und δ nach der vorher auseinandergesetzten Methode auf die Einheitskugel als Bögen

projiziert werden. So könnte nach und nach die sphärische Trigonometrie überhaupt, wenn man es darauf anlegen würde, vollständig auf analytisch-geometrischer Grundlage abgeleitet werden.

c) Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß die Richtungen $(\alpha_1 \beta_1 \gamma_1)$ und $(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$ aufeinander senkrecht stehen. Es wird dann $\delta = 90^0$, $\cos\delta = 0$. Also:

Die Bedingung des Senkrechtstehens zweier Richtungen wird durch die Gleichung:

$$0 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \qquad \textbf{15)}$$

dargestellt. (Vgl. I, § 2.)

Da sie für die Kosinus homogen ist, so kann man statt dieser auch ihnen proportionale Werte setzen. Daher: Verhalten sich die Kosinus einer Richtung wie $m_1 : n_1 : p_1$ und die einer anderen wie $m_2 : n_2 : p_2$, so wird die Bedingung des Senkrechtstehens durch die Formel:

$$0 = m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 \qquad \textbf{15a)}$$

gegeben.

d) Man beachte aber auch die sehr wichtige Folgerung aus 15) und 15a), daß eine gegebene homogene lineare Gleichung:

$$m \cos\alpha + n \cos\beta + p \cos\gamma = 0 \qquad \textbf{15b)}$$

unzählig viele Richtungen bestimmt, welche alle auf ein und derselben Richtung senkrecht stehen, d. h. also in derselben oder in parallelen Ebenen liegen.

e) Die Gleichung 13) gibt $\cos\delta$. Wird $\sin\delta$ gebraucht, so bilde man:

$$\sin\delta = \sqrt{1 - \cos^2\delta} = \sqrt{1 - (\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)^2}.$$

Der Radikand gestattet eine eigenartige Umformung. Man setze zunächst für 1 das Produkt:

$$1 = (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2)$$

und wende nun die folgende, in der analytischen Geometrie des Raumes viel benutzte, merkwürdige Identität an*):

$$\begin{aligned}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \\ = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2,\end{aligned} \qquad \textbf{16)}$$

*) Derartige Umformungen algebraischer Ausdrücke finden sich viele bei analytisch-geometrischen Entwickelungen.

deren Richtigkeit man hinterher durch Auflösen der Klammern sofort bestätigen kann. Es folgt dann:

$$\sin\delta = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \tag{17}$$

wo u, v, w Abkürzungen für die Ausdrücke bedeuten:

$$\begin{aligned} u &= \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2, \\ v &= \cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cos\gamma_2, \\ w &= \cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2. \end{aligned} \tag{18}$$

f) Man beachte, daß u, v, w den beiden Gleichungen genügen (vgl. die folgende Aufgabe):

$$\begin{aligned} u\cos\alpha_1 + v\cos\beta_1 + w\cos\gamma_1 &= 0, \\ u\cos\alpha_2 + v\cos\beta_2 + w\cos\gamma_2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Aufgabe V. Gegeben irgend zwei Richtungen l_1 $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ und l_2 $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ im Raum. Gesucht diejenige Richtung l_3 $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$, welche auf beiden senkrecht steht.

Lösung: Man setze für l_1 und l_3 ebenso für l_2 und l_3 nach 15) die Bedingungen des Senkrechtstehens an, also:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_3 \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta_3 \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma_3 \cdot \cos\gamma_1 &= 0, \\ \cos\alpha_3 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_3 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_3 \cdot \cos\gamma_2 &= 0, \end{aligned}$$

und bestimme die Verhältnisse $\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3$. Es folgt nach Ausführung dieser kleinen Rechnung:

$$\cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = u : v : w,$$

wo u, v, w wieder die Ausdrücke 18) sind, wie nach 19) zu vermuten war. Nach 4), 5) und 17) daher:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_3 &= \frac{u}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{u}{\pm\sin\delta}, \\ \cos\beta_3 &= \frac{v}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{v}{\pm\sin\delta}, \\ \cos\gamma_3 &= \frac{w}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{w}{\pm\sin\delta}. \end{aligned} \tag{20}$$

Bemerkungen a) bis c) zu Aufgabe V. a) Zur Kontrolle von 20) lasse man die erste Richtung mit der $+x$-Achse, die zweite mit der $+y$-Achse zusammenfallen, setze also nach 6):

$$\begin{aligned} &\cos\alpha_1 = +1, \quad \cos\beta_1 = 0, \quad \cos\gamma_1 = 0, \\ &\cos\alpha_2 = 0, \quad \cos\beta_2 = +1, \quad \cos\gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

Daher nach 18):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -1.$$

und nach 20):

$$\cos\alpha_3 = 0, \quad \cos\beta_3 = 0, \quad \cos\gamma_3 = \frac{-1}{\mp\sqrt{1}} = \mp 1,$$

d. h. die Richtung der positiven oder negativen z-Achse. b) Das doppelte Vorzeichen in 20) entspricht nach Anmerkung b) zu Aufgabe II den beiden entgegengesetzten Richtungen des Lotes. Es bleibt daher noch die Frage offen, welche Richtung das positive, welche das negative Vorzeichen in 20) anzeigt, deren Beantwortung freilich erst ein in allen Fällen passendes Kriterium zur Unterscheidung dieser Richtungen voraussetzt.

Jede Drehung in einer Ebene, also auch die Drehung von $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ nach $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$ um den konkaven Winkel ϑ kann je nach der Seite*), von welcher sie betrachtet wird, im Sinn oder im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers erscheinen. Aber auch das Lot geht je nach der Richtung, welche ihm beigelegt wird, also auch je nach der Wahl des Vorzeichens in 20) nach der einen oder anderen Seite der Ebene. Demzufolge muß das gewünschte Kriterium hierauf Bezug nehmen.

Nun gibt in dem eben behandelten besonderen Falle a) das positive Zeichen in 20) die $+z$-Achse, das negative Zeichen die $-z$-Achse. Andererseits kann offenbar der allgemeine Fall aus irgend einem besonderen Fall durch stetige Veränderung der Richtungen von l_1 und l_2 abgeleitet werden, ohne daß sie jemals zusammenfallen oder entgegengesetzt werden — dann nämlich würden u, v, w verschwinden und die Lotrichtung unbestimmt werden. Da ferner bei beständigem Festhalten des $+$-Zeichens in 20) ein plötzliches Umspringen des Drehungssinnes ausgeschlossen ist, so erhält man nach der auf S. 4 festgesetzten Vereinbarung über den Drehungssinn des Koordinatensystems die folgende Entscheidung:

Das positive Vorzeichen in 20) entspricht derjenigen Richtung des Lotes, von welcher aus die Drehung der ersten nach der zweiten Richtung im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers erscheint.

---

*) Die beiden Seiten einer Ebene sollen hier die beiden Teile sein, in welche der Raum durch die Ebene geteilt wird.

c) Vertauscht man die beiden gegebenen Richtungen, so wechselt δ seinen Drehungssinn. Es wechseln aber auch u, v, w ihre Vorzeichen und also auch die im Kriterium angezeigte Lotrichtung, wie es sein muß.

Diesen Nachweis der Bedeutung des Vorzeichens in 20) halte man nicht für unwichtig. Wo immer eine Drehung um irgend eine Achse in Frage kommt, da hat man sofort beide Richtungen der Achse auseinander zu halten, um überhaupt den Sinn dieser Drehung erst angeben zu können*). Bei Drehungsmomenten, Kräftepaaren (Pfeile derselben), bei elektrischen Strömen um Magnete (Ampèresche Regel) usw. ist dies durchaus unerläßlich. Die analytische Behandlung solcher Fragen der Mechanik und Physik erfordert daher gebieterisch Untersuchungen von der Art, wie hier eine als Beispiel geführt worden.

Aufgabe VI. Gegeben eine durch einen gegebenen Punkt P_0 $(x_0 y_0 z_0)$ gehende Gerade l mit der Richtung (α, β, γ). Das Lot q von einem beliebigen Punkte $P(x, y, z)$ im Raum auf l zu berechnen.

Lösung: Bezeichnet man $P_0 P$ mit r und den Winkel zwischen r und l mit δ, so ist:

$$q = r \sin\delta.$$

Da die Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ von r sofort nach 11) durch die Gleichungen:

$$\cos\alpha_1 = \frac{x - x_0}{r}, \quad \cos\beta_1 = \frac{y - y_0}{r}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{z - z_0}{r}$$

bestimmt wird, so berechne man $\sin\delta$ nach 17). Es wird hier:

$$u = \cos\beta \cdot \cos\gamma_1 - \cos\gamma \cdot \cos\beta_1 = \frac{(z - z_0)\cos\beta - (y - y_0)\cos\gamma}{r}.$$

Ganz ebenso folgen v und w. Setzt man diese Ausdrücke in 17) und darauf $\sin\delta$ in die Formel $q = r \cdot \sin\delta$ ein, hebt dann noch den Faktor r im Zähler und Nenner, so folgt:

$$q = \sqrt{\begin{array}{l}[(y - y_0)\cos\gamma - (z - z_0)\cos\beta]^2 + [(z - z_0)\cos\alpha \\ - (x - x_0)\cos\gamma]^2 + [(x - x_0)\cos\beta - (y - y_0)\cos\alpha]^2\end{array}} \qquad 21)$$

*) Die Erde z. B. dreht sich entgegengesetzt zum Uhrzeiger, wenn man sich außerhalb derselben über dem Nordpol vorstellt und auf sie „herunter" sieht. Setzt man in diesen Satz Südpol statt Nordpol, so ist gerade das Gegenteil richtig. Mit dem Finger auf einem Blatt Papier im Kreise herumfahren und dabei sagen: so dreht sich die Erde, oder so läuft sie um die Sonne, darf man nur, wenn zugesetzt wird: von Norden, oder von Süden her betrachtet. Sonst hat es keinen „Sinn".

oder auch nach der Identität 16):

$$q = \sqrt{\begin{aligned}&(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-[(x-x_0)\cos\alpha\\&+(y-y_0)\cos\beta+(z-z_0)\cos\gamma]^2.\end{aligned}} \qquad 22)$$

Aufgabe VII. Gegeben irgend zwei Richtungen $l_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, $l_2(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, die man am einfachsten von demselben Punkt ausgehen lassen kann. Gesucht eine beliebige Richtung $l_3(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ in der durch l_1 und l_2 bestimmten Ebene.

Lösung. Es sei $l_4(\alpha_4\beta_4\gamma_4)$ die auf l_1 und l_2, also auf ihrer Ebene, also auch auf l_3 senkrechte Richtung. Die Formel 15) gibt dann:

$$\begin{aligned}0 &= \cos\alpha_4\cos\alpha_1+\cos\beta_4\cos\beta_1+\cos\gamma_4\cos\gamma_1,\\0 &= \cos\alpha_4\cos\alpha_2+\cos\beta_4\cos\beta_2+\cos\gamma_4\cos\gamma_2,\\0 &= \cos\alpha_4\cos\alpha_3+\cos\beta_4\cos\beta_3+\cos\gamma_4\cos\gamma_3.\end{aligned}$$

Eliminiert man hier $\cos\alpha_4:\cos\beta_4:\cos\gamma_4$, so folgt in Determinantenform*):

$$0 = \begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2\\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3\end{vmatrix} \qquad 23)$$

Diese Gleichung ist also diejenige Bedingung, welche erfüllt sein muß, damit irgend drei Richtungen in derselben Ebene, bzw. in parallelen Ebenen liegen. An ihrer Stelle kann man auch die drei Gleichungen setzen:

$$\begin{aligned}\cos\alpha_3 &= \lambda_1\cos\alpha_1+\lambda_2\cos\alpha_2,\\\cos\beta_3 &= \lambda_1\cos\beta_1+\lambda_2\cos\beta_2,\\\cos\gamma_3 &= \lambda_1\cos\gamma_1+\lambda_2\cos\gamma_2,\end{aligned} \qquad 24)$$

da nach Elimination von λ_1 und λ_2 wieder 23) entsteht. λ_1 und λ_2 sind übrigens voneinander abhängig, da die Bedingung 3) auch für $(\alpha_3\beta_3\gamma_3)$ erfüllt sein muß. Durch Quadrieren und Addieren entsteht daher, wenn der Winkel zwischen l_1 und l_2 mit δ bezeichnet wird, nach 3) und 15) die Formel:

$$1 = \lambda_1^2+\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_2\cos\delta.$$

Soll z. B. l_3 den Winkel δ halbieren, so ist die Bedingung zu erfüllen:

$$\begin{aligned}\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1 &= \cos\alpha_3\cos\alpha_2\\&+\cos\beta_3\cos\beta_2+\cos\gamma_3\cos\gamma_2.\end{aligned}$$

Daher nach Einsetzen von 24):

$$\lambda_1+\lambda_2\cos\delta = \lambda_2+\lambda_1\cos\delta.$$

*) Über Determinanten siehe I, § 20.

Also $\lambda_1 = \lambda_2$, mithin nach der eben abgeleiteten Beziehung:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = + \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\delta)}} = + \frac{1}{2\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Die Richtungskosinus der Winkelhalbierenden sind somit:

$$\cos\alpha_3 = \pm \frac{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2}{2\cos\frac{\delta}{2}}, \quad \cos\beta_3 = \pm \frac{\cos\beta_1 + \cos\beta_2}{2\cos\frac{\delta}{2}},$$

$$\cos\gamma_3 = + \frac{\cos\gamma_1 + \cos\gamma_2}{2\cos\frac{\delta}{2}}.$$

Für die Nebenwinkelhalbierenden würde man erhalten haben:

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{1}{+ 2\sin\frac{\delta}{2}},$$

also:

$$\cos\alpha_3 = + \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{2\sin\frac{\delta}{2}}, \quad \cos\beta_3 = + \frac{\cos\beta_1 - \cos\beta_2}{2\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$\cos\gamma_3 = + \frac{\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2}{2\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Übungsaufgaben:

1. Gegeben $P_0(0, 0, 0)$, $P_1(0, +1, +1)$, $P_2(+1, 0, +1)$, $P_3(+1, +1, 0)$. Zu beweisen, daß P_0, P_1, P_2, P_3 Ecken eines regulären Tetraeders sind.

2. Welche Werte haben Richtungskosinus und Richtungswinkel derjenigen Richtung, welche gegen alle drei Achsen gleich geneigt sind.

3. Gegeben $P_0(+4, +5, +7)$, $P_1(+4, -5, -7)$, $P_2(-4, +5, -7)$, $P_3(-4, -5, +7)$. Welche Besonderheit besitzt das Tetraeder $P_0 P_1 P_2 P_3$.

4. Die Richtungskosinus einer Richtung l_1 verhalten sich wie $3:4:12$. Die einer anderen l_2 wie $1:1:1$. Es soll eine Richtung l festgestellt werden, welche mit l_1 einen Winkel von 60^0, mit l_2 einen solchen von 30^0 bildet.

5. Man beweise, daß, wenn in einem Tetraeder $P_0 P_1 P_2 P_3$ zwei Paare von Gegenkanten, z. B. $P_0 P_1$ und $P_2 P_3$, sowie $P_0 P_2$ und $P_1 P_3$ aufeinander senkrecht stehen, dies auch mit dem dritten Paare $P_0 P_3$ und $P_1 P_2$ der Fall ist.

6. Gegeben die vier Ecken $P_1(x_1 y_1 z_1)$, ... irgend eines Tetraeders $P_1 P_2 P_3 P_4$. Es ist dieses Tetraeder zu einem Parallelepipedon zu ergänzen, derart, daß P_1, P_2, P_3, P_4 vier von den acht Ecken desselben und die sechs Kanten $P_1 P_2$, $P_1 P_3$ ... zu sechs von den zwölf Flächendiagonalen des Parallelepipedons werden. Zu berechnen die Koordinaten der vier anderen Ecken P'_1, P'_2, P'_3, P'_4. (P'_1 soll P_1 gegenüberliegen usw.) Wann wird das Parallelepipedon zu einem Rechtflach?

§ 2.

Fortsetzung der Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes. Bestimmung von Punkten durch zwei, drei und vier gegebene Punkte.

Aufgabe I. Gegeben zwei Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Gesucht: Inhalt des Dreiecks OP_1P_2.

Lösung: Es ist zunächst (Fig. 2):

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \sin\delta}{2},$$

also nach 17), § 1:

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{r_1 r_2 \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}{2}.$$

Nun ist nach 18) und 2), § 1:

$$u = \cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2 = \frac{y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2}{r_1 \cdot r_2}.$$

Bildet man ebenso v und w und hebt $r_1 r_2$ im Zähler und Nenner, so folgt:

$$\triangle OP_1P_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2}. \quad 1)$$

Eine zweite und direkte Ableitung dieser Formel beruht auf dem viel benutzten Satze, daß die senkrechte Projektion einer ebenen Fläche auf eine andere Ebene gleich dem Produkt aus dieser Fläche und dem Kosinus des Neigungswinkels oder auch des Winkels der beiden Lote auf die Ebenen ist. Bezeichnet man also mit $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ die Richtungswinkel des Lotes auf $\triangle OP_1P_2 = \triangle$ und mit $\triangle yz$, $\triangle zx$, $\triangle xy$ die Projektionen von $\triangle$ auf die yz-, zx- und xy-Ebene, so folgt:

$$\triangle yz = \triangle \cdot \cos\alpha_3, \quad \triangle zx = \triangle \cdot \cos\beta_3, \quad \triangle xy = \triangle \cdot \cos\gamma_3.$$

Daher durch Quadrieren und Addieren nach 3), § 1:

$$\triangle^2 = (\triangle yz)^2 + (\triangle zx)^2 + (\triangle xy)^2, \quad 2)$$

eine Formel, die übrigens der Formel 1), § 1 völlig analog ist. Nach I, § 5 findet man aber:

$$\triangle yz = \frac{y_1 z_2 - z_1 y_2}{2}, \quad \triangle zx = \frac{z_1 x_2 - x_1 z_2}{2}, \quad \triangle xy = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{2} \quad 3)$$

und durch Einsetzen in 2) entsteht wieder 1).

Aufgabe II. Gegeben drei Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$, $P_3(x_3 y_3 z_3)$. Gesucht die Formel für den Rauminhalt T des Tetraeders $OP_1P_2P_3$.

Erste Lösung: Es seien r_1, r_2, r_3 die drei Längen OP_1, OP_2, OP_3; $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, $\alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_3\beta_3\gamma_3$ ihre Richtungswinkel; h die Höhe von P_3 auf $\triangle OP_1P_2$; $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ ihre Richtungswinkel; δ der Winkel zwischen r_1 und r_2 und endlich λ der Winkel zwischen h und r_3. Dann ist nach der Grundformel für Berechnung des Volumens einer Pyramide:

$$T = \frac{\triangle OP_1P_2 \cdot h}{3},$$

also, da $\triangle OP_1P_2 = \frac{r_1 r_2 \cdot \sin\delta}{2}$, $h = r_3 \cdot \cos\lambda$ (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen):

$$T = \frac{1}{6} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot \sin\delta \cdot \cos\lambda.$$

Nun folgt aus 13), § 1:

$$\cos\lambda = \cos\alpha_3 \cdot \cos\alpha_4 + \cos\beta_3 \cdot \cos\beta_4 + \cos\gamma_3 \cdot \cos\gamma_4,$$

und da h auf r_1 und r_2 senkrecht steht, nach 20), § 1:

$$\cos\lambda = \frac{\cos\alpha_3 \cdot u + \cos\beta_3 \cdot v + \cos\gamma_3 \cdot w}{\sin\delta}.$$

Also, nach Einsetzen von u, v, w aus 18), § 1:

$$T = \frac{1}{6} \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \,[\cos\alpha_3 (\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2)$$
$$+ \cos\beta_3(\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cos\gamma_2) + \cos\gamma_3(\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2)].$$

Setzt man hier für $\cos\alpha_1$ ein: $\frac{x_1}{r_1}$ usw. und hebt $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ im Zähler und Nenner, so folgt endlich:

$$T = \frac{1}{6}\,[x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1] \qquad 4)$$

oder in Determinantenform:

$$T = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad 4a)$$

Zweite Lösung: Dieselbe stützt sich auf den Satz, daß der Rauminhalt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas gleich dem Produkt aus dem Querschnitt und dem arithmetischen Mittel aus den drei Seitenkanten ist. Man findet (Fig. 3):

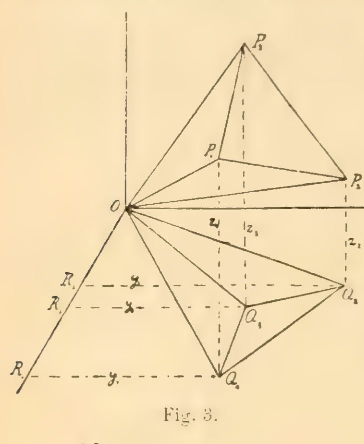


Fig. 3.

$$T = OQ_1Q_3P_1P_3 + OQ_3Q_2P_3P_2 + Q_1Q_2Q_3P_1P_2P_3 - OQ_1Q_2P_2P_1.$$

Jeder der vier rechts stehenden Körper ist ein solches Prisma. Die Querschnitte sind der Reihe nach:

$$\triangle OQ_1Q_3,\ \triangle OQ_3Q_2,\ \triangle Q_1Q_2Q_3,\ \triangle OQ_1Q_2.$$

Die Seitenkanten sind der Reihe nach:

$$0,\ z_1,\ z_3;\ 0,\ z_3,\ z_2;\ z_1,\ z_2,\ z_3;\ 0,\ z_1,\ z_2.$$

Also:

$$T = \frac{1}{3}\left[\triangle OQ_1Q_3 \cdot (0 + z_1 + z_3) + \triangle OQ_3Q_2 \cdot (0 + z_3 + z_2) + \triangle Q_1Q_2Q_3 \cdot (z_1 + z_2 + z_3) - \triangle OQ_1Q_2 \cdot (0 + z_1 + z_2)\right].$$

Diese Formel gestattet sofort eine sehr erhebliche Vereinfachung. Denn es ist:

$$\triangle OQ_1Q_3 + \triangle OQ_3Q_2 + \triangle Q_1Q_2Q_3 - \triangle OQ_1Q_2 = 0.$$

Multipliziert man mit $-\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ und addiert zu der vorigen Gleichung, so folgt in der Tat:

$$T = \frac{1}{3}\left[-\triangle OQ_1Q_3 \cdot z_2 - \triangle OQ_3Q_2 \cdot z_1 + \triangle OQ_1Q_2 \cdot z_3\right]$$

oder, da: $\triangle OQ_1Q_3 = -\triangle OQ_3Q_1$, $\triangle OQ_3Q_2 = -\triangle OQ_2Q_3$ (siehe I, § 5):

$$T = \frac{1}{3}\left[z_1 \cdot \triangle OQ_2Q_3 + z_2 \cdot \triangle OQ_3Q_1 + z_3 \cdot \triangle OQ_1Q_2\right].$$

Nach Einsetzen der Formeln für die Dreiecke:

$$\triangle OQ_2Q_3 = \frac{x_2y_3 - y_2x_3}{2} \text{ usw.}$$

entsteht wieder 4).

Bemerkung: Wie die Formel I, 8), § 5 den Flächeninhalt des Dreiecks positiv oder negativ geben kann, je nach dem „Umlaufssinn“, so ist hier ein gleiches für das Volumen eines Tetraeders in Formel 4) zu erwarten. Aufschluß über diesen Punkt gibt wieder die früher geführte Untersuchung über die Bedeutung des Vorzeichens in 20), § 1, aus der hervorgeht, daß $\cos\lambda$, also auch T, positiv oder negativ, je nachdem P_3 auf der Seite des $\triangle OP_1P_2$ liegt, von welcher aus gesehen die Drehung von OP_1 nach OP_2 um den konkaven Winkel ϑ entgegengesetzt oder im Sinne des Uhrzeigers erfolgt. Gleichbedeutend hiermit ist das folgende Kriterium:

Die Formel 4) gibt den Rauminhalt des Tetraeders positiv oder negativ, je nachdem der Umlauf $P_1 - P_2 - P_3 - P_1$ von „außen“, d. h. von der zum Punkte O entgegengesetzten Seite des $\triangle P_1P_2P_3$ betrachtet, „links“ herum oder „rechts“ herum erfolgt.

Aufgabe III. Gegeben irgend vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4; gesucht der Rauminhalt T des Tetraeders $P_1P_2P_3P_4$.

Lösung: Dieselbe wird sofort erhalten, wenn man einen Punkt, z. B. Punkt P_1 zum Anfangspunkt macht und Formel 4) anwendet. Es wird:

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \tag{5)}$$

Diese Formel ist unsymmetrisch, läßt sich aber ohne Mühe nach Einführung einer neuen Horizontal- und Vertikalreihe (siehe I, § 20) symmetrisch gestalten. Man findet dann:

$$T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \tag{5a)}$$

[Subtrahiert man in 5a) die Elemente der ersten Horizontalreihe von denen der übrigen, so wird die erste Vertikalreihe:

$$1,\ 0,\ 0,\ 0$$

und die Determinante 5a) reduziert sich auf diejenige in 5).]

Bemerkung: Die bisher in § 1 und 2 entwickelten Formeln genügen vollständig, um die Berechnung von Winkeln, von Entfernungen, von Flächeninhalten ebener Polygone und von Rauminhalten irgendwelcher Polyeder (letztere können von einem beliebigen Punkt aus in Tetraeder geteilt werden, vgl. I. § 5) analytisch durchzuführen. Sie sind die Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes, d. h. Formeln, die stets gebraucht werden, wo immer diese Wissenschaft Anwendung findet.

Aufgabe IV. Gegeben zwei Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$. Gesucht irgend ein Punkt $P(xyz)$ auf ihrer Verbindungslinie.

Lösung: Es sei λ das Verhältnis $(P_1 P_2 P) = \frac{P_1 P}{P_2 P}$. Man findet wie in I, § 5:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda} \tag{6}$$

oder auch, für manche Zwecke vorteilhafter:

$$x = x_1 + \mu(x_2 - x_1),\ y = y_1 + \mu(y_2 - y_1),\ z = z_1 + \mu(z_2 - z_1), \tag{7}$$

$$x = x_2 + \nu(x_1 - x_2),\ y = y_2 + \nu(y_1 - y_2),\ z = z_2 + \nu(z_1 - z_2), \tag{7a}$$

wenn in 6) gesetzt wird:

$$-\frac{\lambda}{1-\lambda} = \mu = 1 - \nu, \qquad \frac{1}{1-\lambda} = \nu = 1 - \mu. \tag{8}$$

Für $\lambda = -1$, oder $\mu = \nu = \frac{1}{2}$ erhält man die Mitte:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{6a}$$

Führt man in 7) den Radiusvektor r_{12} und seine Richtungswinkel $(\alpha \beta \gamma)$ ein, setzt also:

$$x_2 - x_1 = r_{12} \cdot \cos\alpha \ \text{usw.},$$

so folgt:

$$x = x_1 + \varrho \cos\alpha, \quad y = y_1 + \varrho \cos\beta, \quad z = z_1 + \varrho \cos\gamma, \tag{9}$$

wo jetzt $\varrho = \mu \cdot r_{12}$ der von Punkt zu Punkt veränderliche Parameter ist. Seine Bedeutung ist auch sehr einfach, denn

ϱ ist nichts anderes, als die Entfernung zwischen P und P_1, und zwar positiv, wenn P auf derselben Seite von P_1 liegt, wie P_2 und negativ im entgegengesetzten Falle.

Aufgabe V. Gegeben drei Punkte P_1, P_2, P_3. Gesucht ein beliebiger Punkt $P(x, y, z)$ in der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$.

Lösung: Führt man die Verhältnisse $n_1 : n_2 : n_3$ der drei Dreiecke ein, welche P zur Spitze und der Reihe nach $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_2$ zur Grundlinie haben, so folgt, ganz wie in I, § 5:

$$x = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3},$$

$$y = \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3}{n_1 + n_2 + n_3}, \qquad \textbf{10)}$$

$$z = \frac{n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3}{n_1 + n_2 + n_3}.$$

Haben n_1, n_2, n_3 dasselbe Zeichen, so liegt P innerhalb des Dreiecks. Für den Schwerpunkt ist $n_1 = n_2 = n_3$, also:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}. \qquad \textbf{10a)}$$

Aufgabe VI. Gegeben vier Punkte $P_1 P_2 P_3 P_4$. Gesucht die Koordinaten irgend eines Punktes P so, daß die vier Tetraeder mit P als Spitze und den Dreiecken $P_2 P_3 P_4$, $P_3 P_4 P_1$, $P_4 P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$ als Grundflächen sich wie vier gegebene Zahlen $n_1 : n_2 : n_3 : n_4$ verhalten.

Lösung: Man bestimme den Schnittpunkt $P'(x' y' z')$ von PP_4 mit der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Die drei Tetraeder mit P als Spitze und den Dreiecken $P' P_2 P_3$, $P' P_3 P_1$, $P' P_1 P_2$ als Grundflächen verhalten sich dann wie diese Dreiecke; ein gleiches gilt aber auch für die Tetraeder mit P_4 als Spitze und denselben Dreiecken als Grundflächen. Also gilt es auch für die Differenzen, d. h. für die drei ersten in der Aufgabe genannten Tetraeder. Daher:

$$\triangle P' P_2 P_3 : \triangle P' P_3 P_1 : \triangle P' P_1 P_2 = n_1 : n_2 : n_3.$$

Die Koordinaten von P' folgen also aus 10), wenn dort auf der linken Seite statt $x y z$ gesetzt wird $x' y' z'$.

Endlich verhalten sich die Tetraeder mit $\triangle P_1 P_2 P_3$ als Grundfläche und P_4 bzw. P als Spitze wie die zugehörigen Höhen. Diese verhalten sich aber wie $P_4 P' : P P'$, d. h.:

$$P_4 P' : P P' = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 : n_4.$$

Will man daher die Formel 6) anwenden, um P durch P_4 und P' zu bestimmen, also:

$$x = \frac{x_4 - \lambda x'}{1 - \lambda} \text{ usw.},$$

so ist für λ der Wert zu setzen:

$$\lambda = \frac{P P_4}{P P'} = - \frac{P_4 P' - P P'}{P P'} = - \frac{n_1 + n_2 + n_3}{n_4}.$$

Werden dann noch für $x' y' z'$ ihre eben bestimmten Ausdrücke, also:

$$x' = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3}{n_1 + n_2 + n_3} \text{ usw.}$$

eingeführt, so entstehen die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}, \\ y &= \frac{n_1 y_1 + n_2 y_2 + n_3 y_3 + n_4 y_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}, \\ z &= \frac{n_1 z_1 + n_2 z_2 + n_3 z_3 + n_4 z_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}. \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Soll P innerhalb des Tetraeders liegen, so müssen n_1, n_2, n_3, n_4 dasselbe Vorzeichen haben. Für $n_4 = 0$ kommt man wieder auf die Formeln 10) zurück und P liegt in der Ebene des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Setzt man $n_3 = n_4 = 0$ und $\frac{n_2}{n_1} = - \lambda$, so liegt P auf der Geraden durch P_1 und P_2 und es entstehen die Formeln 6). Für $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$ erhält man den Schwerpunkt des Tetraeders:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \text{ usw.}$$

Die Formeln 11) sind übrigens identisch mit den Formeln für den Schwerpunkt von vier Massenpunkten P_1, P_2, P_3, P_4 mit den Massen n_1, n_2, n_3, n_4.

Man kann auch 6) ansehen als Parameterdarstellung einer geraden Linie durch irgend zwei ihrer Punkte P_1, P_2; 10) als Parameterdarstellung einer Ebene durch irgend drei in ihr liegende Punkte P_1, P_2, P_3; 11) endlich als Parameterdarstellung für alle Punkte des Raumes durch irgend vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3, P_4.

Übungsaufgaben.

1. Die Verbindungslinien der Mitten gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders gehen durch den Schwerpunkt und werden dort halbiert.

2. Gegeben eine Gerade l_1 durch zwei ihrer Punkte $P_1(+4, +6, -2)$, $P_2(-1, -4, +3)$, ebenso eine zweite Gerade l_2 durch $P_3(+5, +1, +0)$, $P_4(+4, +2, +7)$ und eine dritte Gerade l_3 durch $P_5(+1, +2, +3)$, $P_6(-7, -5, +1)$. Verlangt wird eine Gerade l, welche l_1 in $Q_1(x_1 y_1 z_1)$, l_2 in $Q_2(x_2 y_2 z_2)$, l_3 in $Q_3(x_3 y_3 z_3)$ so schneidet, daß Q_2 Mitte von Q_1 und Q_3 ist. Es sind die neun Koordinaten dieser drei Schnittpunkte zu berechnen.

3. Gegeben dieselben drei Geraden l_1, l_2, l_3 wie in 2). Sie sollen vorgestellt werden als drei unbegrenzt verlängerte windschiefe Kanten eines Parallelepipedons. Es sind die acht Ecken zu berechnen.

4. Das Volumen dieses Parallelepipedons ist zu finden.

5. Der Inhalt T eines Tetraeders ist, ausgehend von den Formeln 5) und 5a), durch die Seiten r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34} desselben auszudrücken.

§ 3.

Das Problem der Koordinatentransformation. Orthogonale Transformationen und Beziehungen zwischen ihren neun Koeffizienten.

Parallelverschiebung. Der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen ist schon in § 1 für den einfachen Fall erledigt worden, daß die Achsen parallel bleiben, also nur eine Parallelverschiebung vorliegt. Nennt man hier a, b, c die Koordinaten des neuen Anfangspunktes in bezug auf das alte System, xyz die Koordinaten irgend eines Punktes P im ersten und $x'y'z'$ im zweiten System, so sind die Transformationsformeln:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c \tag{1}$$

oder umgekehrt

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \tag{1a}$$

Drehung. Weit umständlicher dagegen wird die Behandlung des Problems, wenn sich die Achsenrichtungen geändert haben, wobei zunächst noch der Einfachheit wegen derselbe Anfangspunkt vorausgesetzt werden mag (Fig. 4). Auch soll der Drehungssinn beider Systeme derselbe sein, was ja keine wesentliche Beschränkung ist, da im entgegengesetzten Falle nur eine Achse im neuen System die Positivrichtung zu wechseln hat, um Übereinstimmung des Drehungssinnes zu erzielen. (Siehe § 1.)

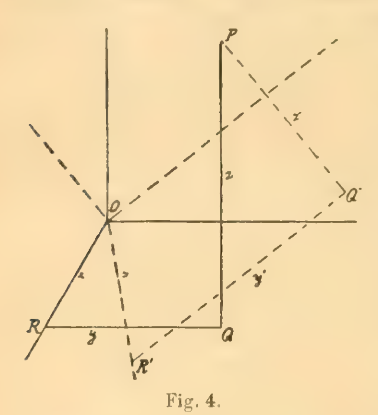


Fig. 4.

Um zunächst die gegenseitige Lage beider Systeme zueinander festzustellen, nimmt man, wie sich sofort herausstellen wird, am besten die Kosinus der neun konkaven Winkel, welche die Positivrichtungen der drei Achsen des einen mit denen des anderen Systems bilden. Zur Erläuterung dient das folgende Schema:

	x	y	z
x'	a_1	b_1	c_1
y'	a_2	b_2	c_2
z'	a_3	b_3	c_3

2)

in welchem $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$, $c_1 c_2 c_3$ die genannten neun Kosinus sind, und zwar ein jeder desjenigen Winkels, welchen die in derselben Vertikalreihe stehende Achse des ersten mit der in derselben Horizontalreihe stehenden Achse des zweiten Systems bildet. Also z. B. $c_2 = \cos(\measuredangle y'z)$.

Die Transformationsformeln selbst ergeben sich nun mit größter Einfachheit aus folgenden beiden Sätzen:

a) Die Projektionen zweier gebrochener Linien (hier $ORQP$ und $OR'Q'P$) zwischen demselben Anfangs- und Endpunkt auf irgend eine Richtung sind einander gleich.

b) Die Projektion einer geraden Strecke auf irgend eine Richtung ist gleich dem Produkt aus der Länge der Strecke und dem Kosinus des Neigungswinkels der Richtung der Strecke gegen diese Richtung.

Projiziert man daher sowohl $ORQP$ als auch $OR'Q'P$ auf irgend eine Richtung l, so folgt sofort:

$$x\cos(xl) + y\cos(yl) + z\cos(zl)$$
$$= x'\cos(x'l) + y'\cos(y'l) + z'\cos(z'l).$$

Läßt man hier l mit der $+x$-Achse zusammenfallen, so wird:

$$\cos(xl) = \cos(xx) = +1, \quad \cos(yl) = \cos(zl) = 0,$$
$$\cos(x'l) = a_1, \quad \cos(y'l) = a_2, \quad \cos(z'l) = a_3.$$

Wird eingesetzt und darauf l ebenso in die y- und die z-Achse verlegt, so folgt:

$$\begin{aligned} x &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ y &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{aligned} \tag{3}$$

Bringt man aber l der Reihe nach mit den Achsen des anderen Systems zur Deckung, so ergibt sich in ganz gleicher Weise:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z, \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z. \end{aligned} \tag{3a}$$

3) und 3a) sind die gewünschten Transformationsformeln. Sie können nur Umkehrungen voneinander sein, so daß z. B. durch Einsetzen von 3) in 3a) die drei Identitäten $x' = x'$, $y' = y'$, $z' = z'$ entstehen müssen. Dabei ist sehr merkwürdig, daß, wie man sieht, beide Male genau dieselben neun Koeffizienten auftreten, nur daß solche drei, die bei 3) in einer Horizontalreihe nebeneinander stehen, bei 3a) in einer Vertikalreihe untereinander angeordnet sind und umgekehrt. Dies ist ein wesentliches Merkmal einer solchen „orthogonalen“ Substitution, deren Formeln 3) und 3a) übrigens, wie man sieht, auf das innigste mit dem Schema 2) verknüpft sind.

Beziehungen zwischen den neun Koeffizienten der orthogonalen Transformationen. Die neun Koeffizienten:

$$a_1 b_1 c_1; \quad a_2 b_2 c_2; \quad a_3 b_3 c_3$$

sind durchaus nicht voneinander unabhängig, sondern durch Bedingungen aneinandergeknüpft, denen man eine große Mannigfaltigkeit von Formen gegeben hat. Am einfachsten gelangt man zu ihnen durch die Bemerkung, daß $a_1 b_1 c_1$ die Richtungskosinus der x'-Achse in bezug auf das System xyz und ebenso $a_2 b_2 c_2$ die Richtungskosinus der y'-Achse, $a_3 b_3 c_3$ der z'-Achse sind. Nach 3), § 1 bestehen also die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Nun sind ferner x', y', z' drei aufeinander senkrechte Richtungen. Die Formel 15), § 1 für die Bedingung des Senkrechtstehens gibt daher:

$$\begin{aligned} a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0, \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese sechs Gleichungen 4) und 5) sind voneinander vollständig unabhängig. Aber sie sind auch zugleich erschöpfend, so daß jede andere Relation zwischen den neun Koeffizienten als eine Folge von ihnen darstellbar sein muß. Denn 4) sagt aus, daß $a_1 b_1 c_1$ usw. überhaupt Richtungskoeffizienten sind, während nach 5) diese drei Richtungen aufeinander senkrecht stehen, wie es von den x'-, y'-, z'-Achsen verlangt wurde.

Allerdings darf man dabei keinen Unterschied machen zwischen Transformationen auf kongruente und auf symmetrische Koordinatensysteme, welche vielmehr erst noch zu trennen sind. Hierzu eignen sich aber die in Aufgabe V, § 1 angestellten Untersuchungen über die Entscheidung zwischen den beiden entgegengesetzten Richtungen eines Lotes ganz vortrefflich. Denn läßt man dort die erste Richtung mit der $+x'$-Achse, die zweite mit der $+y'$-Achse zusammenfallen und nimmt in 20), § 1 das $+$-Zeichen, so entsteht bei Kongruenz die Richtung der $+z'$-Achse, bei Symmetrie der $-z'$-Achse. Im ersteren Falle folgt also [nach 18) und 20), § 1]:

$$\cos \alpha_3 = a_3 = u = b_1 c_2 - c_1 b_2 \text{ usw.},$$

im anderen aber:

$$a_3 = -(b_1 c_2 - c_1 b_2) \text{ usw.}$$

Gemäß dem Zyklus $(x'y'z')$ erhält man also bei Kongruenz, wie hier vorausgesetzt, die neun Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_2 c_3 - c_2 b_3;\; b_1 = c_2 a_3 - a_2 c_3;\; c_1 = a_2 b_3 - b_2 a_3, \\ a_2 &= b_3 c_1 - c_3 b_1;\; b_2 = c_3 a_1 - a_3 c_1;\; c_2 = a_3 b_1 - b_3 a_1, \\ a_3 &= b_1 c_2 - c_1 b_2;\; b_3 = c_1 a_2 - a_1 c_2;\; c_3 = a_1 b_2 - b_1 a_2. \end{aligned} \quad 6)$$

während bei Symmetrie rechts die Vorzeichen gewechselt werden müssen.

Man bemerke wohl, daß die neun Gleichungen 6) in doppelter Weise zyklisch sind. Denn je drei untereinander stehende werden durch den Zyklus (123), also eigentlich $(x'y'z')$, nebeneinander durch Zyklus (abc) oder (xyz) ineinander übergeführt. Es könnte also eine für alle mit der Maßgabe gesetzt werden, daß damit alle durch Anwendung der Zyklen entstehenden mitgegeben seien.

Die Formeln 6) zeigen zugleich eine besondere Eigentümlichkeit der Substitutionsdeterminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad 7)$$

an, daß nämlich die neun Unterdeterminanten hier mit den Elementen übereinstimmen. Bezeichnet man sie, wie in I. § 20 mit:

$$A_1 B_1 C_1;\quad A_2 B_2 C_2;\quad A_3 B_3 C_3,$$

so ist z. B.:

$$A_1 = b_2 c_3 - c_2 b_3,$$

also nach 6):

$$A_1 = a_1 \text{ usw.}$$

Der Wert von Δ selbst ist auch sofort zu haben. Man entwickle nach den Elementen der ersten Vertikalreihe:

$$\Delta = a_1 A_1 + b_1 B_1 + c_1 C_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2,$$

also nach 4):

$$\Delta = +1. \quad 8)$$

(Für Transformationen in symmetrische Systeme dagegen: $\Delta = -1$.)

Entwickelt man aber Δ nach den Elementen der ersten, dann der zweiten und dann der dritten Horizontalreihe, so folgt nach 6) und 8) sofort:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad 4a)$$

Und zieht man endlich die Beziehungen zwischen Elementen und Unterdeterminanten:

$$b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 = 0 \text{ usw.}$$

zu Rate, so entstehen noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0, \\ c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 &= 0, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0. \end{aligned} \qquad 5\text{a})$$

Wie man sieht, gehen 4a) und 5a) aus 4) und 5) auch durch Vertauschung von Vertikal- mit Horizontalreihen hervor und ihre Richtigkeit folgt auch a priori durch die Bemerkung, daß jede der drei Gruppen:

$$a_1 a_2 a_3; \quad b_1 b_2 b_3; \quad c_1 c_2 c_3$$

die drei Richtungskosinus einer Richtung gibt, nämlich der $+x$-, der $+y$- und der $+z$-Achse, aber bezogen auf das $x' y' z'$-System als Koordinatensystem.

Übrigens entstehen auch 4) und 5), bzw. 4a) und 5a) rein analytisch durch Ansetzen der Bedingung, daß 3) und 3a) Umkehrungen voneinander sein sollen. Denn setzt man z. B. 3) in die erste der Formeln 3a) ein, so wird:

$$\begin{aligned} x' = a_1(a_1 x' + a_2 y' + a_3 z') + b_1(b_1 x' + b_2 y' + b_3 z') \\ + c_1(c_1 x' + c_2 y' + c_3 z') = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) x' \\ + (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) y' + (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) z'. \end{aligned}$$

Diese Gleichung muß eine Identität sein, d. h. die Koeffizienten von x', y' und z' müssen rechts $+1, 0, 0$ sein, womit drei der Gleichungen 4) und 5) wiedergefunden werden usw.

Erhebt man die Gleichungen 3) ins Quadrat und addiert, bildet also:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 = (a_1 x' + a_2 y' + a_3 z')^2 + (b_1 x' + b_2 y' + b_3 z')^2 \\ + (c_1 x' + c_2 y' + c_3 z')^2, \end{aligned}$$

löst die Klammern auf, zieht entsprechende Glieder zusammen und wendet 4) und 5) an, so entsteht sehr einfach:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \qquad 9)$$

d. h. jede orthogonale Transformation hat die Eigentümlichkeit — welche auch, wenn man will, als Definition vorangestellt werden kann —, die Summe der Quadrate der Variablen „in sich selbst" zu transformieren. Diese Summe ist für solche Substitutionen „invariant", was ja auch durch Formel 1), § 1 ihre Er-

klärung findet, da sie das Quadrat des Abstandes vom Anfangspunkt in dem einen wie in dem anderen System geben muß.

Besonders einfach wird die Transformation, wenn dabei eine Achse, etwa die z-Achse unverändert bleibt, also eine Drehung um sie vorgenommen wird. Der Drehwinkel sei φ; dann ist augenscheinlich:

$$\measuredangle(xx') = \varphi,\quad \measuredangle(xy') = 90^0 + \varphi,\quad \measuredangle(xz') = 90^0,$$
$$\measuredangle(yx') = 90^0 - \varphi,\quad \measuredangle(yy') = \varphi,\quad \measuredangle(yz') = 90^0,$$
$$\measuredangle(zx') = 90^0,\quad \measuredangle(zy') = 90^0,\quad \measuredangle(zz') = 0.$$

Die Formeln 3) werden daher jetzt:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \\ z &= z', \end{aligned} \tag{3b}$$

und man erhält nach Fortlassung der selbstverständlichen dritten Gleichung wieder die Formeln für die Drehung eines **ebenen** Koordinatensystems, wie sie in I, § 4 abgeleitet worden waren.

Hier genügte eine einzige Größe, ein Winkel φ. Aber der allgemeine Fall verlangt selbstverständlich **drei** Parameter, da es sich um neun Koeffizienten handelt, die nur durch sechs voneinander unabhängige Gleichungen, nämlich 4) und 5) oder 4a) und 5a) miteinander verknüpft sind. Dies geht auch aus der folgenden geometrischen Betrachtung hervor:

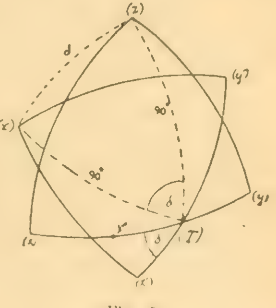


Fig. 5.

Es sei zur besseren Übersicht um den Anfangspunkt O als Mittelpunkt eine Kugel beschrieben (Fig. 5), welche die positiven Achsen in den Punkten $(+x), (+y), (+z); (+x'), (+y'), (+z')$ schneidet. Führt man die Gerade OT ein, in welcher die xy- und die $x'y'$-Ebene sich schneiden, bezeichnet einen ihrer beiden Schnittpunkte auf der Kugel mit (T) und nennt dann:

φ den Winkel von $(+x)$ nach (T),
ψ den Winkel von $(+x')$ nach (T),
δ den Winkel zwischen $(+x)\,(T)$ und $(+x')\,(T)$,

und nimmt sie positiv, wenn, wie in Fig. 5, die erste Drehung von $(+z)$, die zweite von $(+z')$, die dritte von (T) aus (außen)

entgegengesetzt zur Uhr erscheint, negativ im anderen Falle, so kann die Transformation auf folgende drei Drehungen zurückgeführt werden*):

1. Drehung von $(x)(y)(z)$ um (z). Winkel $= \varphi$. Neue Lage $(\xi)(\eta)(\zeta)$, (ζ) mit (z), (ξ) mit (T) zusammenfallend.
2. Drehung von $(\xi)(\eta)(\zeta)$ um (ξ). Winkel $= \delta$. Neue Lage $(\xi')(\eta')(\zeta')$, (ξ') mit (ξ), (ζ') mit (z') zusammenfallend.
3. Drehung von $(\xi')(\eta')(\zeta')$ um (ζ'). Winkel $= -\psi$. Neue Lage $(x')(y')(z')$.

Die Formel 3b) ergibt in ihrer Anwendung auf diese drei Fälle:

I.

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi,$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi,$$
$$z = \zeta.$$

II.

$$\xi = \xi',$$
$$\eta = \eta' \cos\delta - \zeta' \sin\delta,$$
$$\zeta = \eta' \sin\delta + \zeta' \cos\delta.$$

III.

$$\xi' = x' \cos\psi + y' \sin\psi,$$
$$\eta' = -x' \sin\psi + y' \cos\psi,$$
$$\zeta' = z'.$$

Werden nun die beiden Zwischensysteme $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi'\,\eta'\,\zeta'$ wieder eliminiert, was durch einfaches Einsetzen von III in II und darauf von II in I bewirkt wird, so entsteht die allgemeinste Transformation 3. Man erhält dann durch Vergleich der so gewonnenen Transformationsformeln mit 3. für die neun Koeffizienten die Formeln:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi \cos\delta,\\
a_2 &= \cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi \cos\delta,\\
a_3 &= \sin\varphi \sin\delta.\\
b_1 &= \sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\delta.\\
b_2 &= \sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\delta,\\
b_3 &= -\cos\varphi \sin\delta.\\
c_1 &= -\sin\psi \sin\delta,\\
c_2 &= +\cos\psi \sin\delta,\\
c_3 &= \cos\delta.
\end{aligned} \qquad \mathbf{10}$$

*) Bekanntlich führt man auch in der darstellenden Geometrie die Auffindung einer beliebigen rechtwinkligen Projektion eines Gebildes aus gegebenem Grundriß und Aufriß auf solche Drehungen zurück.

Die Ausführung der Zwischenrechnungen ist hier unterblieben, weil die Formeln 10) mit Hilfe der Formeln der sphärischen Trigonometrie auch unmittelbar der Fig. 5 entnommen werden können. Denn a_1 z. B. ist nichts anderes als $\cos(x x')$. Bogen $(x x')$ ist aber Seite des sphärischen Dreieckes $(x)(T)(x')$. Der gegenüberliegende Winkel ist $= \delta$ und die anderen Seiten sind φ und ψ. So gibt der Kosinussatz sofort die erste der Formeln 10) und die anderen findet man durch Anschluß an den Punkt (T) in ganz gleicher Weise.

Die Formeln 10) werden namentlich in der Anwendung auf Probleme der Physik und Mechanik trotz ihres Mangels an Symmetrie bevorzugt, besonders weil φ, ψ und δ so einfache Bedeutung haben und die Transformation auf Drehungen um Koordinatenachsen herauskommt.

Daß aber andere, durchaus symmetrische Darstellungen vorhanden sein müssen, leuchtet ein, und es wäre sonderbar, wenn sie trotz gründlichster Untersuchungen über orthogonale Transformationen noch nicht gefunden worden wären. Die folgende rein algebraische und rationale rührt von Euler her.

Es seien m, n, p, q irgend vier Größen und es werde der Einfachheit wegen gesetzt:

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 = N. \tag{11}$$

Dann hat Euler gefunden:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{m^2 + n^2 - p^2 - q^2}{N}, \quad a_2 = 2\,\frac{np - mq}{N}, \quad a_3 = 2\,\frac{nq + mp}{N}, \\ b_1 &= 2\,\frac{pn + mq}{N}, \quad b_2 = \frac{m^2 - n^2 + p^2 - q^2}{N}, \quad b_3 = 2\,\frac{pq - mn}{N}, \\ c_1 &= 2\,\frac{qn - mp}{N}, \quad c_2 = 2\,\frac{qp + mn}{N}, \quad c_3 = \frac{m^2 - n^2 - p^2 + q^2}{N}. \end{aligned} \tag{12}$$

Der Weg zu diesen Formeln möge hier nur skizziert, aber dem Leser die Herleitung selbst überlassen bleiben. Euler hat bewiesen, daß ein starrer Körper, hier das System $x y z$, aus einer Lage in eine andere, hier $x' y' z'$, durch eine einzige Drehung übergeführt werden kann*). Die Drehungsachse muß

*) Dieser Satz über Drehungen um einen Punkt heißt der Satz von „Chasles“. Euler hat ihn aber früher entdeckt.

also in beiden Systemen dieselben Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ haben. Bezeichnet man den Winkel der Drehung mit φ, schließt dann die neun Winkel (xx') usw. mittels des Kosinussatzes an diese Achse an (die Ausdrücke sind erst zu suchen) und führt endlich m, n, p, q durch die Proportionen ein:

$$m:n:p:q = \cos\frac{\varphi}{2} : \cos\alpha\cdot\sin\frac{\varphi}{2} : \cos\beta\cdot\sin\frac{\varphi}{2} : \cos\gamma\cdot\sin\frac{\varphi}{2},$$

so entstehen die Formeln 12).

Es bleibt noch die allgemeinste Transformation zu erörtern, bei der weder der Anfangspunkt, noch die Achsenrichtungen geblieben sind. Hierzu mache man den Übergang über ein drittes System $\xi\eta\zeta$, das mit xyz die Achsenrichtungen, mit $x'y'z'$ den Anfangspunkt gemeinsam hat. Bezeichnet man mit a, b, c die Koordinaten des neuen Anfangspunktes in bezug auf das System xyz, so folgt nach 1):

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c. \tag{13}$$

Werden ferner die neun Richtungskosinus $a_1 = \cos(xx')$ usw. eingeführt, so folgt aus 3):

$$\begin{aligned} \xi &= a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ \eta &= b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ \zeta &= c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{aligned} \tag{14}$$

Durch Zusammenziehen ergibt sich also die gesuchte Transformation:

$$\begin{aligned} x &= a + a_1 x' + a_2 y' + a_3 z', \\ y &= b + b_1 x' + b_2 y' + b_3 z', \\ z &= c + c_1 x' + c_2 y' + c_3 z'. \end{aligned} \tag{15}$$

Sie enthält zwölf Koeffizienten, die aber nur von sechs willkürlichen Größen abhängen. Denn a, b, c, die Verschiebungskomponenten des Anfangspunktes, sind ganz willkürlich, die neun anderen Koeffizienten aber hängen, wie eben ausführlich gezeigt, von drei Parametern, z. B. φ, ψ und ϑ ab. So stehen also bei der allgemeinsten Transformation rechtwinkliger in rechtwinklige Koordinaten sechs willkürliche Konstanten:

$$a,\ b,\ c,\ \varphi,\ \psi,\ \vartheta \tag{16}$$

zur Verfügung.

Bemerkung: Die Gleichungen 15) sind nicht nur für die analytische Geometrie an sich von größter Bedeutung, sondern sie bilden auch die Grundlage für die analytische Behandlung eines der wichtigsten Probleme der Mechanik, des Problems der Bewegung eines starren oder festen Körpers. Man denkt sich hierzu ein im Raume unbewegliches Koordinatensystem der xyz, sowie ein im Körper festes der $x'y'z'$, welches letztere daher die Bewegungen dieses Körpers, als mit ihm fest verbunden, mitmachen muß und bezieht nun jeden materiellen Punkt auf beide Systeme. Dann sind jederzeit für denselben materiellen Punkt $x'y'z'$ konstante, xyz aber mit der Zeit veränderliche Größen, weil sich eben die Lage der Systeme zueinander durch die Bewegung stetig ändert. Es sind also auch die sechs Größen 16) Funktionen der Zeit und man sieht wohl ein, daß es nunmehr nur noch auf die Ermittelung der letzteren ankommt, das Problem somit eine analytische Grundlage gewonnen hat.

In der Regel wird dabei die Transformation 15) in die beiden Komponenten 13) und 14) aufgelöst, d. h. in die Bewegung des im Körper angenommenen Anfangspunktes (meistens des Schwerpunktes) und in eine Drehung oder vielmehr kegelförmige Bewegung um denselben*). Man wird nun auch verstehen, weshalb einem starren Körper, von dem angenommen wird, daß er sich beliebig bewegen könne, sechs Grade von Freiheit der Bewegung zuerteilt werden.

Übungsaufgaben.

1. Man zeige, daß eine orthogonale Transformation 3) oder 3a) immer auf eine Drehung um eine Achse zurückgeführt werden kann und daß für die Richtungskosinus derselben die Proportion gilt:

$$n : p : q = c_2 - b_3 : a_3 - c_1 : b_1 - a_2.$$

2. Man eliminiere aus den Relationen zwischen den neun Koeffizienten der orthogonalen Substitution die drei in der Diagonale stehenden, nämlich

$$a_1, \quad b_2, \quad c_3$$

und zeige, daß für die übrigen sechs die Gleichungen gelten:

$$c_2^2 - b_3^2 = a_3^2 - c_1^2 = b_1^2 - a_2^2 = a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1.$$

---

*) Für die Erde z. B. die sogenannte Präzession und Nutation. Diese Bezeichnungen hat man dann auf andere Drehungen, z. B. der Geschosse übertragen.

3. Nachdem man nach 1) für die Verhältnisse der Differenzen

$$c_2 - b_3, \quad a_3 - c_1, \quad b_1 - a_2$$

die Bezeichnung $n : p : q$ eingeführt, versuche man nach 2) die Eulerschen Formeln 12) abzuleiten.

4. Es sollen nach 12) alle orthogonalen Substitutionen gefunden werden, welche zugleich vertauschbar sind (xyz mit $x'y'z'$ zu vertauschen). Nach 1) entstehen sie durch eine halbe Umdrehung. Im besonderen drehe man um die zu der x-, y- und z-Achse gleich geneigte Gerade. Wie lauten dann die Transformationsgleichungen?

---

§ 4.

Der Begriff der Gleichung einer Fläche. Die beiden Hauptprobleme der analytischen Geometrie des Raumes.

Die Gleichung einer Fläche. In der Ebene stellt eine Gleichung

$$y = f(x)$$

oder in impliziter Form:

$$F(x, y) = 0$$

eine Kurve dar. Welcher Art wird nun, auf drei Veränderliche erweitert, das durch eine Gleichung von der Form:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

oder implizite:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1a}$$

analytisch definierte geometrische Gebilde sein?

Dieses Gebilde ist selbstverständlich nicht mehr und nicht weniger als die Gesamtheit oder der Inbegriff aller Punkte im Raum, deren Koordinaten die vorgelegte Gleichung 1) oder 1a) erfüllen. Man sieht aber auch, daß zwei Koordinaten x und y willkürlich angenommen werden können, wenigstens solange nach Einsetzen ihrer Werte in 1) oder 1a) für die dritte Koordinate z reelle Werte erzielt werden. Im allgemeinen ist also zu schließen, daß die durch eine Gleichung 1) oder 1a) getroffene Auswahl aus allen Punkten im Raum ein zweidimensionales Gebilde, d. h. eine Fläche sein wird.

Und umgekehrt stelle man sich irgend eine Fläche, etwa eine Ebene oder eine Kugel vor, die zu dem Koordinatensystem eine beliebige Lage haben mag. Dann nehme man in der xy-Ebene irgend einen Punkt Q beliebig an, ziehe durch ihn die Parallele zur z-Achse und suche den Schnitt P mit der Fläche auf. Augenscheinlich hängt $QP = z$ von der Lage des Punktes Q, d. h. von x und y ab und der analytische Ausdruck dieser Abhängigkeit ist eben eine Gleichung von der Form 1) oder 1a), ist die Gleichung der Fläche.

Somit ist für den Raum die Fläche, was für die Ebene die Kurve war, nämlich das durch eine einzige Gleichung zwischen den Koordinaten darstellbare geometrische Gebilde. Der unendlichen Mannigfaltigkeit von Flächen, die man sich im Raum vorstellen kann, z. B. Ebenen, Kugeln, Zylinder, Kegel, Ellipsoide, Schraubenflächen usw. usw., entspricht die unendliche Mannigfaltigkeit von Gleichungen, die zwischen drei Veränderlichen x, y und z gesetzt werden können. Beiderseits ist vorderhand nirgend eine Schranke zu sehen. Wie die Kraft der Raumanschauung des Geometers mit spielender Leichtigkeit neue und neue Formen von Flächen ersinnen und dem Analytiker die Frage nach ihren Gleichungen übermitteln kann, so mag auch der letztere die ihm geläufigen Funktionen, wie Potenzen, Wurzeln usw. beliebig auf drei Veränderliche x, y, z beziehen, worauf der Geometer nun zu bestimmen hätte, welche Art von Fläche durch die und die und die Formel bestimmt ist.

Dieses gegenseitige Entsprechen von Fläche und Gleichung, das durch die nun folgenden Beispiele ausgiebig erläutert werden wird, gibt der analytischen Geometrie erst die besondere Eigentümlichkeit, durch welche sie sich von allen anderen Arten der Geometrie, namentlich der synthetischen Geometrie, unterscheidet. Aber schon jetzt treten mit voller Klarheit die beiden zueinander reziproken Hauptaufgaben hervor; nämlich:

1. Gegeben eine Fläche durch geometrische Eigenschaften. Gesucht ihre Gleichung 1) oder 1a).
2. Gegeben eine Gleichung 1) oder 1a). Gesucht der Verlauf, die Gestalt und die geometrischen Eigenschaften der durch sie dargestellten Fläche.

Beispiele a), b), c), d) zur ersten Aufgabe.

a) Eine Ebene schneidet von den Koordinatenachsen die Längen:

$$p = +4, \quad q = +3, \quad r = +5$$

ab. Wie lautet ihre Gleichung?

Lösung: Führt man außer den gegebenen Punkten: $A(+4, 0, 0)$, $B(0, +3, 0)$, $C(0, 0, +5)$ noch irgend einen Punkt P der Ebene als „laufenden" Punkt $P(x, y, z)$ ein, so ist die Bedingung, daß P in der durch A, B, C gehenden Ebene liege, identisch mit der Bedingung, daß der Rauminhalt des Tetraeders $ABCP = 0$ sei. Macht man etwa A zum Anfangspunkt, so gibt daher die Formel 5), § 2 sofort die Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} -4 & +3 & 0 \\ -4 & 0 & +5 \\ x-4 & y & z \end{vmatrix}$$

oder entwickelt:

$$15x + 20y + 12z = 60$$

oder auch:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1, \qquad \textbf{2)}$$

allgemein:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1, \qquad \textbf{2a)}$$

also eine Gleichung ersten Grades.

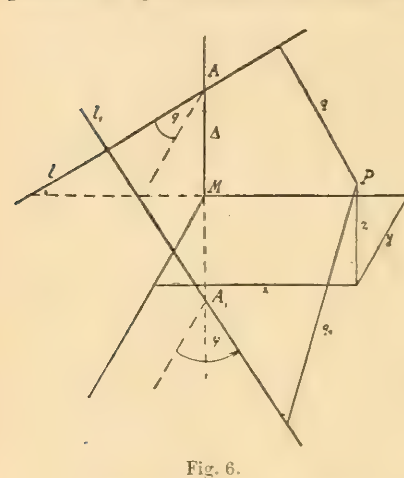


Fig. 6.

b) Gegeben sind irgend zwei (windschiefe) Gerade l und l_1 im Raum. Gesucht der Ort derjenigen Punkte P, welche von beiden Geraden gleiche Entfernungen q und q_1 haben (Fig. 6).

Lösung: Es seien $a\,b\,c$ bzw. $a_1\,b_1\,c_1$ die Koordinaten irgend eines Punktes auf l bzw. l_1, ferner $\alpha\beta\gamma$ bzw. $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ Richtungswinkel von l bzw. l_1. Endlich sei $P(x, y, z)$ der laufende Punkt auf der Fläche. Der Ansatz $q = q_1$ oder $q^2 = q_1^2$ liefert dann nach 21), § 1 sofort eine Gleichung zweiten Grades.

Bei passender Wahl des Koordinatensystems erhält diese Gleichung eine sehr einfache Gestalt. Wie auch l und l_1

liegen, stets gibt es eine dritte Linie (die kürzeste Verbindungslinie), welche beide schneidet und auf beiden senkrecht steht. Man nehme sie zur z-Achse, die beiden Schnittpunkte A und A_1 als die beiden vorgenannten Punkte auf l und l_1, setze $AA_1 = 2\varDelta$, mache die Mitte M zum Anfangspunkt und nehme die Richtung MA als Positivrichtung der z-Achse. Dann ist:

$$a = \varDelta, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad a_1 = -\varDelta, \quad b_1 = 0, \quad c_1 = 0.$$

Ferner wähle man die x- und y-Achse so, daß sie die Winkel der durch M zu l und l_1 gezogenen Parallelen halbieren und bezeichne mit φ den Winkel von $+x$ nach l_1, also mit $-\varphi$ den Winkel von $+x$ nach l. Dann ist:

$$\cos\alpha = \cos\varphi, \quad \cos\beta = \cos(90^0 + \varphi) = -\sin\varphi, \quad \cos\gamma = 0,$$
$$\cos\alpha_1 = \cos\varphi, \quad \cos\beta_1 = \cos(90^0 - \varphi) = +\sin\varphi, \quad \cos\gamma_1 = 0.$$

21), § 1 gibt daher:

$$q^2 = (z-\varDelta)^2\sin^2\varphi + (z-\varDelta)^2\cos^2\varphi + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2$$
$$= (z-\varDelta)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2.$$

Ebenso:

$$q_1^2 = (z+\varDelta)^2 + (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2.$$

Der Ansatz $q_1^2 = q^2$ oder $q_1^2 - q^2 = 0$ führt somit zu der überaus einfachen Form:

$$4\varDelta\cdot z - 4xy\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

oder:

$$z = \frac{xy}{p}, \tag{3)}$$

wo $p = \dfrac{\varDelta}{\sin\varphi\cos\varphi} = \dfrac{2\varDelta}{\sin 2\varphi}$.

c) Gegeben ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kante $2a$) (Fig. 7). Eine Gerade bewegt sich so, daß sie an drei windschiefen Kanten AE, FG, CD, bzw. deren Verlängerungen entlang gleitet. Es soll die Gleichung der entstehenden Regelfläche*) gefunden werden.

---

*) Regelfläche ist jede Fläche, welche durch Bewegung einer Geraden entstehen kann.

Lösung: Man mache die Mitte des Würfels zum Anfangspunkt und richte die Achsen parallel zu den Kanten. Es sei l eine Gerade, wie sie in der Aufgabe verlangt wird, die FG in P_1, CD in P_2, EA in P_3 schneidet. Diese drei Punkte sind dann:

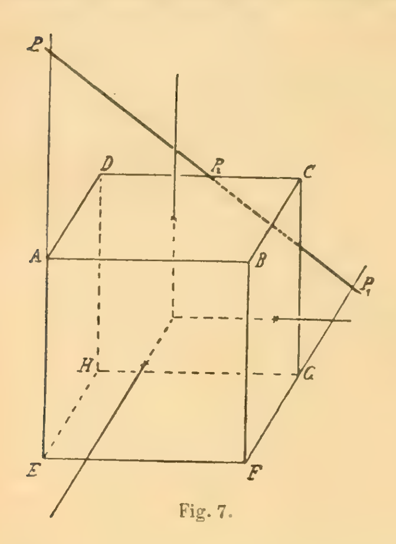


Fig. 7.

$$P_1(x_1, +a, -a),$$
$$P_2(-a, y_2, +a),$$
$$P_3(+a, -a, z_3),$$

wo x_1, y_2, z_3 noch von der Lage der drei Punkte (Fig. 7) auf den Kanten abhängen, also vorläufig noch ganz unbestimmt sind. Ferner sei $P(x, y, z)$ der **laufende** Punkt auf l. Drückt man (11a, § 1) die Verhältnisse der Richtungskosinus von l erst durch die Koordinaten von P und P_1, dann von P und P_2 und endlich von P und P_3 aus, so folgt:

$$\begin{aligned}\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= x - x_1 : y - a \ : z + a, \\ &= x + a \ : y - y_2 : z - a, \\ &= x - a \ : y + a \ : z - z_3.\end{aligned}$$

Da nun x_1, y_2, z_3, wie gesagt, noch ganz unbestimmt sind, so wähle man unter diesen Proportionen nur diejenigen aus, die x_1, y_2, z_3 **nicht** enthalten, also:

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{y-a}{z+a}, \quad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{z-a}{x+a}, \quad \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{x-a}{y+a},$$

folglich:

$$\frac{(x-a)\,(y-a)\,(z-a)}{(x+a)\,(y+a)\,(z+a)} = 1,$$

oder nach Fortschaffung des Nenners, Auflösen der Klammer und Zusammenziehen:

$$xy + yz + zx + a^2 = 0. \qquad 4)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung.

Um ihre Richtigkeit zu kontrollieren, beachte man, daß P_1, P_2, P_3 auch auf der Fläche liegen. Da nun jeder dieser drei Punkte beliebig angenommen werden kann, so besagt dies nichts anderes, als daß die Fläche die drei Kanten AE, FG, DC — jede unbegrenzt verlängert — enthalten muß. Nun ist z. B. für jeden Punkt der Kante FG $y = +a$, $z = -a$, und nach Einsetzen in 4) entsteht in der Tat identisch $0 = 0$, welchen Wert man auch für x annimmt.

Aber auch die drei Kanten AD, EF, GC liegen auf der Fläche. Denn z. B. AD ist die Linie l in einer besonderen Lage, da hier P_1 unendlich fern liegt, P_2 mit D und P_3 mit A zusammenfällt. Nun ist für jeden Punkt auf AD (bzw. der Verlängerung) $y = -a$, $z = +a$, und in der Tat wird auch durch Einsetzen dieser Werte die Gleichung 4) zur Identität, wie man auch x annehmen mag.

d) Gegeben der Mittelpunkt $M(a, b, c)$ und der Radius r einer Kugel. Gesucht ihre Gleichung.

L ö s u n g: Es sei $P(x, y, z)$ der laufende Punkt auf der Kugel. Nach 10), § 1 liefert die Bedingung $MP = r$ oder $MP^2 - r^2 = 0$ sofort die gesuchte Gleichung in der Gestalt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0. \qquad 5)$$

Diese vier Beispiele genügen wohl vorläufig zur Erläuterung der ersten Aufgabe, nämlich aus einer geometrischen Definition einer Fläche ihre Gleichung abzuleiten, besonders wenn man sich der zahlreichen Winke erinnert, die im ersten Teil (I, § 7) bei den Kurven gegeben worden sind und dort nachgelesen werden können.

Was die zweite Hauptaufgabe, die Ableitung der Gestalt und der geometrischen Eigenschaften einer Fläche aus ihrer Gleichung betrifft, so mögen den Beispielen einige allgemeine Bemerkungen vorangehen.

Man kann in die gegebene Gleichung $z = f(x, y)$ oder $F(x, y, z) = 0$ für x und y irgendwelche Werte einsetzen, den zugehörigen Wert von z (bzw. die Werte) durch Auflösung berechnen und so die Koordinaten b e l i e b i g vieler Punkte der Fläche bestimmen. Trägt man sie in den Raum ein, so wird bei hinreichender Anzahl zuletzt die Gestalt der Fläche klar und deutlich hervortreten.

Diese Art graphischer Konstruktion, so vorzügliche Dienste sie für Kurven in der Ebene leistet (I, § 7), eignet sich doch nicht besonders für die Flächen im Raum, weil erstens meist zu viel Punkte gebraucht werden, zweitens zwei unabhängige Veränderliche x und y zu nehmen sind und drittens das wirkliche Eintragen von Punkten doch nur in einem Modell möglich wäre, während man gewöhnlich nur ein ebenes Blatt Papier vor sich hat, auf welchem die Fläche durch eine möglichst einfache Skizze zur Darstellung gebracht werden soll.

Man gibt daher meist einer anderen Methode den Vorzug, der Methode der „Schnitte". Es wird die Fläche z. B. durch eine Schar von Ebenen parallel zur xy-Ebene geschnitten (Horizontalschnitte, Höhenkurven bei Landkarten), so daß diese Schnitte bei hinreichend kleinem Abstand die Gestalt ergeben müssen.

Wie aber verschafft man sich aus der gegebenen Gleichung der Fläche die Kenntnis vom Verlauf der Schnitte? Da dieselben ebene Kurven sind, wird es sich dabei wohl um ein Kapitel aus der analytischen Geometrie der Ebene handeln. — In der Tat beachte man, daß alle Punkte einer solchen Schnittebene dasselbe z, etwa $z = h$ haben. Also setze man in die Gleichung der Fläche $z = h$, worauf sie die Form:

$$F(x, y, h) = 0$$

annimmt. Dies ist sofort die Gleichung des Schnittes, wobei sogar statt der x- und y-Achse die Schnittlinien der Ebene mit der xz- und yz-Ebene genommen werden können, weil bei dieser Verschiebung nach oben oder nach unten an x oder an y nichts geändert wird.

Es ist auch nicht nötig, für z einen neuen Buchstaben h zu setzen; man hat eben nur in der gegebenen Gleichung z als konstant und x und y als variabel anzusehen und dann die Art des Schnittes nach den Methoden der analytischen Geometrie der Ebene zu bestimmen. Wird dann hinterher z variiert, so wird die Fläche selbst als kontinuierliche oder stetige Folge ihrer Schnitte aufgefunden.

Sollte aber trotzdem die räumliche Anschauung der Fläche noch an Deutlichkeit zu wünschen übrig lassen, so hindert nichts, etwa x oder y als konstant anzusehen und so Schnitte

parallel zur yz- und zur zx-Ebene zu bilden. Man kann auch, wenn es geboten scheint, Parallelschnitte zu einer beliebigen Ebene zunehmen, wenn nötig mit Ausführung einer Koordinatentransformation, um sie zur xy-Ebene zu machen. Hin und wieder leisten auch Schnitte mit anderen Flächen, die also sogenannte Raumkurven (siehe § 6) ergeben, hierbei gute Dienste.

Genug, die Gestalt einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche kann man immer herausbringen, wenn auch die Mühe wächst, je schwieriger die Gleichung zu behandeln ist. Im Prinzip aber ist das Problem hiermit gelöst. Weit tiefer hingegen schneidet die Frage nach den geometrischen Eigenschaften ein, welche einer durch ihre Gleichung gegebenen Fläche zukommen! Auch lassen sich über ihre Behandlung ebensowenig bestimmte Regeln geben, wie in dem betreffenden Problem der Kurven. Man muß hierzu die Gleichung der Fläche eingehend nach den verschiedensten Gesichtspunkten untersuchen, umformen, vielleicht mit anderen Gleichungen verknüpfen, um Beziehungen zu anderen Flächen herzustellen usw. Dabei aber zeigt sich nach und nach eine solche Fülle der Betrachtungsarten, daß gerade hier ein unerschöpfliches Feld für immer neue analytisch-geometrische Entwickelungen gegeben ist, welches hervorragende Mathematiker mit größter Gründlichkeit bearbeitet haben, das aber trotzdem wohl schwerlich jemals erschöpft werden wird.

In Rücksicht auf den Zweck dieses Lehrbuches muß in dieser Hinsicht Maß gehalten werden, zumal jene Entwickelungen zum großen Teile in entlegene und ferne Gebiete mathematischer Forschung führen und zu ihrer Bewältigung auch der Gebrauch der Differential- und Integralrechnung nicht entbehrt werden kann. Aber die einfacheren, zugänglicheren und der praktischen Anwendung näher liegenden Gesichtspunkte wird man auch hier einigermaßen vollständig dargelegt vorfinden.

Beispiele zur zweiten Hauptaufgabe. Zur Erläuterung an Beispielen wollen wir wieder die Gleichungen 2), 3), 4) und 5) nehmen, aber ohne die Quelle zu berücksichtigen, aus welcher sie vorhin geschöpft worden waren. Es sollen eben nur die Gleichungen vorliegen und weiter nichts.

a) $$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1. \qquad 2)$$

Man suche: Schnitt mit xy-Ebene, setze also $z = 0$. Es folgt:

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1,$$

d. i. eine Gerade, welche von der x- und der y-Achse die Stücke $p = +4$, $q = +3$ abschneidet. Ebenso findet man als Schnitte mit der xz- und der yz-Ebene zwei gerade Linien:

$$y = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{z}{5} = 1; \quad x = 0, \quad \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1,$$

welche von der x- bzw. y-Achse die vorher bestimmten Längen und von der z-Achse die Länge $r = +5$ abschneiden.

So sind schon drei Gerade auf der Fläche bestimmt, die sich gegenseitig schneiden und daher in einer Ebene liegen; wenn also 2), wie man wohl vermuten kann, überhaupt eine Ebene darstellt, so muß es diese sein. Man nehme Horizontalschnitte, betrachte also in 2) z als konstant und schreibe dann so:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 - \frac{z}{5}.$$

Für jeden Wert von z, wie man sieht, eine gerade Linie, die stets sich selbst parallel bleibt, da die Koeffizienten von x und y konstant sind (I, § 9). Die Fläche entsteht daher, indem eine Seite des vorher bestimmten Dreiecks parallel mit sich selbst an den anderen entlang gleitet, d. h. sie ist eine Ebene.

b) $$z = \frac{x \cdot y}{p}. \qquad 3)$$

1. Man bestimme: Schnitt mit xy-Ebene, setze also $z = 0$. Es folgt $x \cdot y = 0$, d. h. entweder $x = 0$, oder $y = 0$. Die Fläche wird von der xy-Ebene in zwei Geraden geschnitten, die mit der x-Achse und der y-Achse zusammenfallen.

2. Setzt man $x = 0$, oder $y = 0$, so folgt beidemal $z = 0$. Die yz-Ebene schneidet die Fläche in der y-Achse, die xz-Ebene in der x-Achse. Also nichts Neues!

3. Man betrachte z als konstant, so gibt die Gleichung als Horizontalschnitt eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten mit den beiden Geraden zusammenfallen, in denen die

xz- und yz-Ebene die Ebene des Schnittes schneiden. Je nachdem z positiv oder negativ (p möge positiv sein), läuft die Hyperbel im ersten und dritten oder im zweiten und vierten Quadranten. Von oben gesehen, haben diese Hyperbeln scheinbar dieselben Asymptoten und ihre (reellen) Scheitel liegen, je nachdem z positiv oder negativ, scheinbar in der einen oder in der anderen Winkelhalbierenden der Winkel zwischen den (mit der x- und y-Achse zusammenfallenden) Asymptoten. (Konjugierte Hyperbeln, I, § 13.)

4. Man schneide die Fläche durch Parallelebenen zur xz-Ebene, betrachte also y als konstant. Die Gleichung wird dann vom ersten Grade, der Schnitt ist eine Gerade, welche (da die Konstante fehlt) die y-Achse schneidet.

5. Ebenso sind die Schnitte mit den Ebenen parallel zur yz-Ebene gerade Linien, welche die x-Achse schneiden.

6. Man führe endlich eine Drehung von 45° um die z-Achse aus, um die Kurven zu erhalten, auf welchen die Scheitel der in 3) genannten Hyperbeln liegen. Nach 3 b), § 3 sind die zugehörigen Transformationsformeln:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \quad z = z'.$$

Die transformierte Gleichung ist:

$$z' = \frac{x'^2 - y'^2}{2p},$$

$$y' = 0 \text{ gibt } z' = \frac{x'^2}{2p}; \quad x' = 0 \text{ gibt } z' = -\frac{y'^2}{2p},$$

also zwei Parabeln mit demselben Scheitel 0, demselben Parameter $2q$, aber die eine in der $x'z'$-Ebene nach oben, die andere in der $y'z'$-Ebene nach unten.

7. Betrachtet man y' als konstant und schreibt die Gleichung dementsprechend so:

$$\left(z' + \frac{y'^2}{2p}\right) = \frac{x'^2}{2p},$$

so sieht man eine zur Parabel $z' = \frac{x'^2}{2p}$ kongruente Parabel entstehen, deren Scheitel auf der anderen Parabel liegt. Ebenso sind die Schnitte parallel zur $y'z'$-Ebene mit der Parabel: $z' = -\frac{y'^2}{2p}$ kongruente Parabeln, deren Scheitel auf der Parabel

$z' = \frac{x'^2}{2p}$ liegen. Die Fläche wird also beschrieben, wenn die eine der beiden Parabeln parallel zu sich selbst so an der anderen entlang gleitet, daß ihr Scheitel stets auf der letzteren bleibt.

[Offenbar folgt eine entsprechende Konstruktion für alle Flächen, deren Gleichungen die Form $z = f(x) + \varphi(y)$ besitzen, wenn man statt der beiden Parabeln die beiden Kurven setzt, in welchen die Fläche durch die xz- bzw. die yz-Ebene geschnitten wird.]

Die Fläche 3) wird übrigens später wiedergefunden werden, sie ist das sogenannte gleichseitige hyperbolische Paraboloid (§ 14).

c) $$xy + yz + zx + a^2 = 0. \qquad 4)$$

Man bemerke zunächst die Vertauschbarkeit von x, y und z in der Gleichung, welche zur Folge hat, daß mit jedem Punkte noch fünf andere mitbestimmt sind. Man sieht ferner, daß parallele Schnitte zu den Koordinatenebenen gleichseitige Hyperbeln sind, und bei näherer Untersuchung würde sich so eine deutliche Vorstellung von der Gestalt der Fläche unschwer erzielen lassen.

Diese Methode ist aber diesmal doch etwas umständlich. Sie kann hier durch eine glückliche Überlegung sofort überflüssig gemacht werden. Läßt die eben betonte Vertauschbarkeit von x mit y und z nicht vermuten, daß diejenige durch den Anfangspunkt gehende Gerade, welche gegen die Achsen gleich geneigt ist, eine bevorzugte Lage zur Fläche haben wird? Versuchen wir also sie zur z'-Achse eines neuen Koordinatensystems $x'y'z'$ (mit demselben Anfangspunkt) zu machen!

Es ist dann sofort in 2), § 3:

$$a_3 = b_3 = c_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und die dritte der Gleichungen 3a), § 3 wird:

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z).$$

Für die Wahl der x'- und y'-Achse in der zur z'-Achse senkrechten Ebene liegen vorderhand gar keine bestimmenden

Gründe vor. Wie sie aber auch angenommen werden, stets muß die Gleichung 9), § 3:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

erfüllt sein.

Dies genügt aber hier zur Transformation! Denn man kann die Gleichung 4) auch so schreiben:

$$\frac{-(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z)^2}{2} + a^2 = 0,$$

also nach Einsetzen der eben abgeleiteten Formeln:

$$\frac{-(x'^2 + y'^2 + z'^2) + 3z'^2}{2} + a^2 = 0,$$

oder endlich:

$$\frac{x'^2}{2a^2} + \frac{y'^2}{2a^2} - \frac{z'^2}{a^2} = 1.$$

Damit ist die transformierte Gleichung hergestellt, wie man auch die x'- und y'-Achse wählt. Setzt man hier erst x' und dann $y' = 0$, so entstehen als Schnitte mit der $y'z'$- und $x'z'$-Ebene zwei kongruente Hyperbeln mit den reellen Halbachsen $= a\sqrt{2}$ und der imaginären Halbachse $= a$. Werden aber Parallelschnitte zur $x'y'$-Ebene genommen (z' konstant gesetzt), so entstehen Kreise, deren Mittelpunkte auf der z'-Achse liegen. Also ist die Fläche — und hieraus erklärt sich wieder die Unabhängigkeit der neuen Gleichung von der Wahl der x'- und y'-Achse — eine Umdrehungsfläche, entstanden durch Umdrehung einer Hyperbel mit der reellen Halbachse $= a\sqrt{2}$ und der imaginären Halbachse $= a$ um die imaginäre Achse. Sie ist ein Rotationshyperboloid mit einer Schale. [Vgl. § 14 *).]

d) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0. \qquad 5)$$

Diese Gleichung sagt nach 10), § 1 aus, daß der laufende Punkt $P(x, y, z)$ von einem festen Punkte $M(a, b, c)$ den gegebenen Abstand r haben solle. Sie gehört also einer Kugel an.

---

*) Man lasse einen gewöhnlichen Würfel sich um eine durch zwei gegenüberliegende Ecken gehende Körperdiagonale drehen, wobei die eine Ecke auf dem Tisch aufruht. Die drei durch sie und ebenso die drei durch die andere Ecke gehenden Kanten beschreiben je einen Kreiskegel; die anderen sechs Kanten aber beschreiben die genannte Umdrehungsfläche und man sieht deutlich die hyperbolische Form des Profils.

Auch die Methode der Schnitte führt mühelos zu demselben Ergebnis, wenn man zunächst M zum Anfangspunkt macht, also die Transformation:

$$x - a = x', \quad y - b = y', \quad z - c = z'.$$

vornimmt. Es wird dann aus 5):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - r^2 = 0.$$

Setzt man hier $x' = 0$. oder $y' = 0$. oder $z' = 0$, so entstehen Kreise um M als Mittelpunkt mit r als Radius. Ferner sind alle Parallelschnitte zur $x'y'$-Ebene Kreise, deren Mittelpunkte auf der z'-Achse liegen. Also ist die Fläche eine Rotationsfläche, entstanden durch Umdrehung der zuerst genannten Kreise um die z'-Achse, d. h. um einen Durchmesser. Mit anderen Worten: Sie ist eine Kugel.

Schließlich muß noch die überaus wichtige Anwendung der Flächen zur Veranschaulichung von Funktionen zweier Veränderlicher erwähnt werden. Wo immer der Wert einer Größe z von den Werten zweier anderer Größen x und y abhängt (z. B. das Volumen z einer gegebenen Gasmenge von der Temperatur x und dem Druck y), so muß stets z als Funktion von x und y bestimmbar sein:

$$z = f(x, y),$$

und diese Gleichung kann man dann als Fläche deuten. Dies machen sich besonders die Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung zunutze, um der Theorie der partiellen Differentialquotienten, der Doppelintegrale usw. eine besonders für den Anfang höchst wünschenswerte Anschaulichkeit zu geben.

Übungsaufgaben.

1. Auf einer Geraden l sind vier feste Punkte A, B, C und P gegeben. Sie bewegt sich so, daß A auf der yz-Ebene, B auf der zx-Ebene, C auf der xy-Ebene bleibt. Auf welcher Fläche bewegt sich P? (Siehe I, § 14.)

2. Gegeben ein Kreis mit Radius r. Um jeden seiner Punkte wird als Mittelpunkt ein Kreis mit demselben Radius r beschrieben. Alle diese Kreise sollen parallel und senkrecht auf dem ersten Kreise sein. Auf welcher Fläche liegen sie?

3. Durch einen gegebenen Punkt $P_0(x_0 y_0 z_0)$ sind Ebenen beliebig gelegt und in ihnen die Schwerpunkte der Dreiecke, welche die Koordinatenebenen ausschneiden, bestimmt worden. Auf welcher Fläche liegen die Schwerpunkte?

4. Gegeben zwei Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$. Zwei Punkte P und P_1 sind so zu wählen, daß $AP = A_1 P_1$, $BP = B_1 P_1$, $CP = C_1 P_1$. Auf welcher Fläche liegt P, wenn P_1 in der Ebene des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ angenommen wird? (Die Untersuchung ist so weit zu führen, daß der Grad der Gleichung zu ersehen ist.)

§ 5.

Einige besondere Arten von Flächen und ihre Gleichungsformen. Grad oder Ordnung der Flächen. Parameterdarstellungen.

1. Umdrehungsflächen. Wenn eine Fläche durch Umdrehung irgend einer Kurve um irgend eine Achse l entstanden ist, so wird sie von den auf l senkrechten Ebenen in Kreisen geschnitten, deren Mittelpunkte auf l liegen. Es empfiehlt sich augenscheinlich, die Achse zu einer Koordinatenachse, etwa zur z-Achse zu machen, worauf der Radius ϱ eines solchen Kreisschnittes eine Funktion von z wird. Zwischen z und ϱ existiert daher eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(\varrho, z) = 0. \qquad 1)$$

Nun ist ϱ als Abstand des laufenden Punktes von der z-Achse $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Man setze ein. Es folgt:

$$\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0,$$

oder auch, da eine Funktion von $\sqrt{x^2 + y^2}$ zugleich eine Funktion von $(x^2 + y^2)$ ist:

$$\psi(x^2 + y^2, z) = 0, \qquad 1\text{a})$$

und dies ist die allgemeinste Form der Gleichung einer Umdrehungsfläche um die z-Achse.

Das charakteristische Kennzeichen einer solchen Gleichung ist also, daß x und y nur in der Verbindung $x^2 + y^2$ vorkommen dürfen. Setzt man $y = 0$, so entsteht die Gleichung des „Meridianschnittes":

$$\psi(x^2, z) = 0,$$

also derjenigen Kurve, durch deren Umdrehung die Fläche gebildet worden ist.

Fällt die Umdrehungsachse nicht mit einer Koordinatenachse zusammen, so bedarf es meist besonderer Untersuchungen, um dann die Form der Gleichung festzustellen. (Für Flächen zweiten Grades siehe § 14.)

2. Zylinderflächen. Zylinderfläche ist irgend eine Fläche, welche durch Bewegung einer mit sich selbst parallel bleibenden Geraden, der Kante des Zylinders, entsteht. Hier sind alle parallelen Schnitte kongruent. Sie werden Querschnitte genannt, wenn die Ebenen auf den Kanten senkrecht stehen.

Man nehme die z-Achse parallel zur Richtung der Kanten und führe den laufenden Punkt $P(x, y, z)$ ein. Er kann beliebig auf der Fläche, also auch auf einer Zylinderkante „laufen". Dann ändert sich nur z, während x und y ihre Werte beibehalten. z hängt also überhaupt von x und von y gar nicht ab, d. h. die Gleichung darf kein z enthalten, sie muß sich auf eine Gleichung zwischen x und y reduzieren, d. h. sie muß von der Form sein:

$$F(x, y) = 0. \tag{2}$$

Nimmt man umgekehrt ein Wertepaar x, y, das einer solchen Gleichung 2) genügt, so liegt jeder Punkt mit diesem x und diesem y, aber mit einem beliebigen z auf der Fläche. Alle diese Punkte aber bilden zusammen eine Parallele zur z-Achse; also besteht die Fläche aus solchen Parallelen, d. h. sie ist eine Zylinderfläche.

Fügt man zu der Gleichung 2) noch die Gleichung $z = 0$, so wird der Querschnitt des Zylinders erhalten. In diesem Sinne gibt eine Gleichung, die nur x und y, aber nicht z enthält, in der xy-Ebene eine Kurve, wie in I, § 6 auseinandergesetzt, im Raume aber einen Zylinder mit dieser Kurve als Querschnitt.

3. Die Kegelfläche. Sie entsteht durch Bewegung einer Geraden, die dabei beständig durch einen und denselben Punkt, die Spitze des Kegels, geht. Nimmt man die Gerade einseitig begrenzt, wie in der Elementarstereometrie, so erhält man nur die eine Hälfte des Kegels; es ist aber hier der ganze, der sogenannte „Doppelkegel" ins Auge zu fassen.

Es werde die Spitze zum Anfangspunkt O gemacht. Jeder andere Punkt $P(x, y, z)$ bestimmt dann eine unbegrenzte, durch O und P gehende Kante des Kegels, dessen Gleichung also die Eigenschaft haben muß, für die Koordinaten aller Punkte dieser Kante erfüllt zu sein. Nach der Formel:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x : y : z$$

für ihre Richtungswinkel ist aber das Verhältnis $x:y:z$ dabei unveränderlich dasselbe, also auch $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ $\left(\text{natürlich auch } \frac{x}{y} = \frac{x}{z} : \frac{y}{z}\right)$. Mit anderen Worten: Die Gleichung eines Kegels muß auf die Form gebracht werden können:

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0. \qquad 3)$$

Dies erfordert aber, daß die linke Seite der Gleichung homogen sei, d. h. daß alle Glieder denselben Grad p besitzen. Durch Division mit z^p entsteht dann 3).

So ist z. B. mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 - \lambda z^2 = 0$$

ein Kegel gegeben, denn alle Glieder sind vom zweiten Grade. Nach Division durch z^2 entsteht:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 - \lambda = 0.$$

Zur Feststellung eines Kegels mit gegebener Spitze genügt offenbar ein einziger ebener Schnitt (der aber nicht durch die Spitze gehen darf, weil er sonst durch diejenigen Kanten gebildet wird, die in der Schnittebene liegen). Da in dem Beispiel die Parallelschnitte zur xy-Ebene Kreise werden, deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen, so ist der Kegel hier ein gerader Kreiskegel, nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert gedacht. Den Winkel γ, den die Kanten mit der Drehungsachse bilden, die „Öffnung" des Kegels*) bestimmt man durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\varrho}{z},$$

wo ϱ der Radius des Kreises im Abstande z ist. Und da $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} = z\sqrt{\lambda}$, so folgt:

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{\lambda}.$$

Ausartungen von Flächen. Es kann auch der Fall eintreten, daß einer gegebenen Gleichung keine eigentliche Fläche entspricht. Die Gleichung:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2x - 2z + 2 = 0$$

*) Manchmal wird auch 2γ als der Öffnungswinkel bezeichnet.

wird nur für Punkte einer geraden Linie erfüllt, was man allerdings dieser Form der Gleichung nicht ansehen kann. Wenn man aber weiß, daß sie aus der folgenden:

$$(x + y + 1)^2 + (y + z - 1)^2 = 0$$

durch Auflösen der Klammern entstanden ist, so sieht man in der Tat bei Beschränkung auf reelle Werte nur die Möglichkeit, daß zugleich:

$$x + y + 1 = 0 \quad \text{und} \quad y + z - 1 = 0.$$

Diese beiden Gleichungen stellen aber zwei Ebenen vor, die sich nur in einer Geraden schneiden.

Zerlegt man indessen die linke Seite nach der Formel:

$$a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$$

in imaginäre Faktoren, so kann die Fläche auch aufgefaßt werden als ein Paar imaginärer Ebenen, die nur eine reelle gemeinsame Schnittlinie haben.

Man kann auch leicht Gleichungen bilden, so daß die Fläche nur aus einem oder mehreren Punkten besteht. Die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

wird nur erfüllt für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; sie stellt den Anfangspunkt oder vielmehr eine zu einem Punkte zusammengeschrumpfte, eine unendlich kleine Kugel oder auch, da die Gleichung homogen ist, einen imaginären Kegel vor. (Er besteht aus allen durch den Anfangspunkt gehenden „Nullinien“ [siehe I, § 3], da die Entfernungen vom Anfangspunkt, wie die Gleichung sagt, $= 0$ sein sollen, ohne daß, wenn „komplexe“ Werte zugelassen werden, das Zusammenfallen mit dem Anfangspunkt gefordert wird.)

Die Gleichung endlich:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$$

wird für gar keine reellen Werte von x, y, z erfüllt; es ist die ganze Fläche imaginär, eine Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius $r = 2i$ geworden.

Endlich ist noch der Fall möglich, daß die Fläche zerfällt. Dieser Fall ist unter Beschränkung auf zwei variable

in Teil I, § 6 behandelt worden; danach trifft dies ein, wenn die linke Seite der Gleichung:

$$F(x, y, z) = 0$$

in Faktoren gespalten werden kann:

$$F(x, y, z) = F_1(x, y, z) \cdot F_2(x, y, z),$$

so daß entweder F_1 oder $F_2 = 0$ sein muß.

Man teilt die Flächen ein in algebraische und transzendente, je nachdem in ihren Gleichungen mit x, y, z nur algebraische oder auch transzendente Operationen vorgenommen worden sind. Flächen mit transzendenten Gleichungen wird man in der Regel, wenn es sich nicht um ganz besondere, abstrakte mathematische Probleme handelt, nur auf ihren äußeren Verlauf untersuchen. Für die Praxis kommen dabei Flächen von besonders einfacher Gestalt, wie z. B. Schraubenflächen in Betracht, weil man sonst meist doch nur schwer zu handhabende Gleichungsformen erhält und deshalb lieber auf ihre analytische Darstellung ganz verzichtet.

Anders aber steht es mit den algebraischen Flächen, die bei eingehender Untersuchung eine verschwenderische Fülle merkwürdiger und überraschender Eigenschaften erkennen lassen, welche, tief in den Gleichungen versteckt, sich nach und nach vor dem Scharfsinn des Mathematikers entfalten. Sie sind, nach Sicherstellung der Elemente, das eigentliche Feld analytisch-geometrischer Entwickelungen, deren einfachste Methoden und wichtigste Ergebnisse bis zu den Flächen zweiter Ordnung nunmehr zu erläutern sind.

Wie in der Kurventheorie ist auch hier das wichtigste Einteilungsprinzip für die Flächen der Grad ihrer Gleichung oder die „Ordnung“. Man hat zu ihrer Feststellung etwa in der Gleichung auftretende Wurzeln durch Potenzieren, Brüche durch Multiplizieren und Klammern durch Auflösen zu entfernen, bis zuletzt die linke Seite als eine Summe von Gliedern von der Form:

$$A x^p \cdot y^q \cdot z^r$$

erscheint. Grad eines solchen Gliedes ist $= p + q + r$ und Grad oder Ordnung der Fläche ist der höchste überhaupt vorkommende Grad, welcher, da auch im Raum die Transformationsformeln

linear sind, von der Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängig ist und nur auf die Fläche selbst Bezug hat.

Setzt man in der Gleichung einer Fläche n^{ter} Ordnung $z = 0$, so entsteht im allgemeinen eine Gleichung n^{ten} Grades für x und y; da man nun jede Ebene zur xy-Ebene machen kann, so sind ebene Schnitte einer Fläche n^{ter} Ordnung auch Kurven derselben Ordnung, die sich nur in besonderen Fällen auf solche niederer Ordnung reduzieren. Setzt man ferner, um die Schnittpunkte mit der z-Achse zu erhalten, in der Gleichung der Fläche $x = 0$, $y = 0$, so bleibt für z eine Gleichung n^{ter} Ordnung; d. h. die z-Achse, also auch jede Linie im Raum schneidet die Fläche in n (reellen oder imaginären) Punkten. Es können, wenn man imaginäre und unendlich ferne Punkte nicht mitrechnet, weniger, niemals aber mehr sein; es sei denn, daß die Gerade ganz und gar in der Fläche liege, wie es z. B. für die z-Achse der Fall ist, wenn die Gleichung kein von x und y freies Glied hat, oder auch, was dasselbe ist, wenn man sie in folgender Form schreiben kann:

$$x F_1(x, y, z) + y F_2(x, y, z) = 0,$$

wo F_1 und F_2 irgendwelche Funktionen $(n-1)^{ten}$ Grades vorstellen.

Parameterdarstellungen von Flächen: Sie entsprechen durchaus den Parameterdarstellungen der ebenen Kurven, nur mit dem Unterschied, daß man hier wohl zwei Parameter u und v wird einführen müssen. Es seien also u und v zwei Größen, die irgendwelche Beziehungen zu dem laufenden Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche haben derart, daß sie sich bei Veränderung seiner Lage auch verändern und umgekehrt diese Lage bestimmen, wenn man ihre Werte angibt. Dann müssen auch die Koordinaten x, y, z mit bestimmt sein, d. h. es muß drei Gleichungen von der Form geben:

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v). \qquad 4)$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der Fläche. Verändert man u und v beliebig, so gibt sie jeden Punkt der Fläche. Ihre Gleichung aber wird offenbar durch Elimination von u und v aus 4) erhalten; etwa so, daß u und v aus den

beiden ersten Gleichungen berechnet und in die dritte eingesetzt werden.

Umgekehrt kann man, formell wenigstens, für jede durch irgend eine Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegebene Fläche Parameterdarstellungen und noch dazu auf unendlich mannigfaltige Arten finden. Man führe hierzu irgend zwei andere Funktionen durch die Definitionen $u = F_1(x, y, z)$, $v = F_2(x, y, z)$ als u und v ein, aber so, daß sie voneinander und von $F(x, y, z)$ unabhängig sind, und berechne nun aus den drei Gleichungen:

$$0 = F(x, y, z), \quad u = F_1(x, y, z), \quad v = F_2(x, y, z)$$

die Koordinaten x, y, z. Diese werden dann Funktionen von u und v, d. h. es ist eine Parameterdarstellung 4) gebildet worden.

Nimmt man z. B. x und y selbst als Parameter, setzt also $u = x$, $v = y$, so bleibt nur die letzte der Gleichungen 4) übrig:

$$z = f_3(x, y),$$

als die explizite Form der Gleichung der Fläche.

Sehr oft aber wird die wirkliche Ausführung der Parameterdarstellung mit großen analytischen und rechnerischen Schwierigkeiten verbunden sein, besonders bei hohem Grade der Flächengleichung. In solchem Falle wird der erfahrene Mathematiker häufig nicht viel mehr leisten können, als der unerfahrene Neuling und auf die Bestimmung der Funktionen f_1, f_2, f_3 in 4) verzichten.

Damit ist aber nicht gesagt, daß eine solche rein formelle Darstellung 4), d. h. ohne Angabe der Funktionen f_1, f_2, f_3 keinen Nutzen haben könne; sie hat im Gegenteil den Mathematikern große Dienste geleistet, besonders seitdem Gauß in der klassischen Abhandlung „Disquisitiones circa superficies curvas" (Untersuchungen über krumme Oberflächen) von ihr mit unvergleichlicher Meisterschaft Gebrauch gemacht hat, um die Theorie der Krümmung der Flächen mit den glänzendsten Entdeckungen zu bereichern.

Wie man aber in einfacheren Fällen von der Gleichung zur Parameterdarstellung übergeht, werden folgende Beispiele lehren.

1. Gegeben sei die Gleichung ersten Grades:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

also eine Ebene. Hier nimmt man am einfachsten x und y selbst als Parameter und schreibt in expliziter Form:

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}.$$

2. Gegeben sei die Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Für diese ist die uralte, für Erd- und Himmelskugel so viel benutzte Parameterdarstellung am Platze. Es werde die xy-Ebene zur Äquatorebene, die xz-Ebene zur Ebene des Anfangsmeridians gemacht und dementsprechend der Winkel l als Länge und der Winkel φ als Breite eingeführt. Die Formeln 7), § 1:

$$x = r \cdot \cos\varphi \cdot \cos l, \quad y = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin l, \quad z = r \cdot \sin\varphi$$

geben dann, wenn für r der Radius der Kugel eingesetzt wird, bei veränderlichem φ und l sofort die gesuchte Darstellung.

Um eine andere, welche rein algebraisch und „rational" ist, d. h. keine Wurzel enthält, abzuleiten, mache man irgend einen Punkt der Kugel, etwa den mit den Koordinaten $(0, 0, -r)$ zum Anfangspunkt. Die Transformationsformeln für Parallelverschiebung lauten dann:

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1 - r,$$

und die Gleichung der Kugel wird:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2 - 2rz_1 = 0.$$

Es fehlt selbstverständlich das konstante Glied, da die Fläche durch den neuen Anfangspunkt hindurchgeht. Jede durch ihn gehende Gerade schneidet sie noch in einem zweiten Punkte. Führt man für einen solchen Strahl die Verhältnisse der Richtungskosinus:

$$u = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}, \quad v = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

ein, so wird nach 2a), § 1:

$$x_1 : y_1 : z_1 = u : v : 1,$$

oder:

$$x_1 = u \cdot z_1, \quad y_1 = v \cdot z_1.$$

Nach Einsetzen in die Gleichung folgt, wenn der Faktor z_1, als dem Anfangspunkt entsprechend, fortgelassen wird:

$$(u^2 + v^2 + 1)z_1 - 2r = 0.$$

Den so gefundenen Ausdruck für z_1 setze man in die vorhergehenden beiden Gleichungen ein. Nach Rückkehr zu den alten Koordinaten entsteht dann die gewünschte Parameterdarstellung:

$$x = \frac{2ru}{u^2 + v^2 + 1},$$
$$y = \frac{2rv}{u^2 + v^2 + 1}, \qquad 5)$$
$$z = \frac{r(1 - u^2 - v^2)}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Anmerkung: Diese Methode führt offenbar für jede Fläche zweiten Grades, nachdem man irgend einen ihrer Punkte zum Anfangspunkt gemacht, zu einer Parameterdarstellung, in welcher x, y, z gebrochene rationale Funktionen zweiten Grades mit demselben Nenner werden. [Die Umkehrung ist aber, nebenbei bemerkt, nicht richtig, trotzdem sie für Kurven zweiter Ordnung (I, § 24) richtig war.]

3. Eine zur z-Achse senkrechte Gerade dreht sich um diese Achse und gleitet dabei während der Drehung gleichmäßig an ihr entlang. Die entstehende Schraubenfläche, welche das Prinzip der Wendeltreppen wiedergibt, ist darzustellen (Fig. 8).

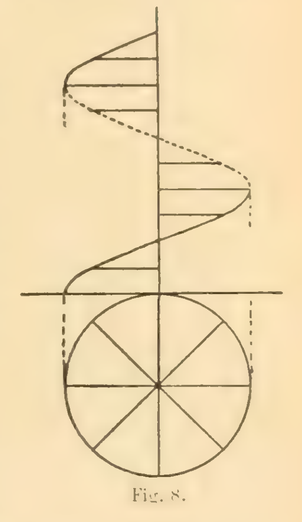


Fig. 8.

Läßt man die x-Achse mit der Geraden in irgend einer Lage zusammenfallen, bezeichnet ferner mit h die einer vollen Umdrehung entsprechende Steighöhe und führt den Drehungswinkel φ sowie den Abstand ϱ von der z-Achse als Parameter für den laufenden Punkt ein, so folgt:

$$x = \varrho \cdot \cos\varphi, \quad y = \varrho \cdot \sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \cdot \varphi. \qquad 6)$$

Dies ist die Parameterdarstellung. Die Gleichung entsteht durch Elimination von ϱ und φ. Es wird zunächst:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

also nach der dritten Gleichung:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}\left(2\pi \cdot \frac{z}{h}\right). \qquad 7)$$

Diese Gleichung ist transzendent, wie nicht anders zu erwarten.

Der große Vorzug der Parameterdarstellungen tritt namentlich bei tiefergehenden Untersuchungen hervor, wenn geeignete geometrische Größen zu Parametern genommen werden. Häufig werden dann sonst schwer zugängliche Eigenschaften der Flächen mit Leichtigkeit auffindbar. So ist die so wichtige Frage der Abbildung von Flächen aufeinander mit der Parameterdarstellung eng verknüpft. Wenn man z. B. u und v einerseits als Parameter irgend einer Fläche F, gemäß den Gleichungen 4), andererseits aber u und v auch als Koordinaten eines Punktes in einer Ebene E ansieht, so ist damit sofort eine Abbildung von F auf E hergestellt, bei welcher jeder Punkt von F sein Abbild in einem Punkte von E hat. Oder es seien zwei Flächen F und F_1 durch Parameter u und v, bzw. u_1 und v_1 gegeben. Werden dann die Gleichungen $u_1 = u$, $v_1 = v$ oder ganz allgemein $u_1 = \varphi(u, v)$, $v_1 = \psi(u, v)$, wo φ und ψ irgendwelche gegebene Funktionen bedeuten, angesetzt, so haben wir sofort Abbildungen mannigfaltiger Art von F und F_1 aufeinander.

Die Gleichungen 5) z. B. liefern, wenn u und v als Koordinaten des laufenden Punktes in einer Ebene genommen werden, die bekannte, von dem genialen Hipparch aufgefundene stereographische Abbildung einer Kugel auf die Ebene, welche ihrer vielen ausgezeichneten Eigenschaften wegen noch heute in unseren Atlanten am meisten benutzt wird. Es ist hier nicht der Ort, auf die Kartographie einzugehen; nur eine dieser Eigenschaften möge als Beispiel angezogen werden, wie einfach die Parameterdarstellung häufig die Beweise gestaltet. Man betrachte irgend einen Kreis auf der Kugel und schneide sie hierzu durch irgend eine Ebene:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Setzt man hier 5) ein und schafft den Nenner fort, so entsteht für u und v eine Gleichung zweiten Grades, und zwar von der Form:

$$\lambda(u^2 + v^2) + mu + nv + p = 0.$$

Sie stellt also, wenn u und v als Koordinaten eines Punktes angesehen werden, auch einen Kreis dar (I, § 12), d. h. bei der stereographischen Abbildung der Kugel werden Kreise durch Kreise abgebildet.

Übungsaufgaben.

1. Ein Kreis dreht sich um eine beliebige in seiner Ebene liegende Achse. Die Gleichung der Drehfläche zu finden.
2. Wie lautet die Gleichung desjenigen Kreiskegels, in welchem die Koordinatenachsen Kanten sind, und zwar so, daß die Positivrichtungen auf derselben Kegelhälfte liegen?
3. Man suche zu der in Übungsaufgabe 2), § 4 bezeichneten Fläche eine passende Parameterdarstellung.
4. Man beweise, daß die Gleichung:

$$F(u, v) = 0,$$

wo u und v zwei lineare Ausdrücke sein sollen:

$$u \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \quad v \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$$

immer eine Zylinderfläche darstellt.

---

§ 6.

Kurven im Raum. Ihre beiden Gleichungen. Die Methode der Projektionen. Parameterdarstellungen von Kurven.

Unter Kurve im Raum wird hier irgend eine Kurve schlechthin verstanden, gleichgültig, ob sie in einer Ebene liegt, wie Kreis, Ellipse usw. oder ob nicht, wie z. B. die Kurve, in welche sich ein Kreis verwandelt, wenn seine Ebene auf einem Zylinder aufrollt.

Zur analytischen Darstellung einer solchen Kurve reicht eine einzige Gleichung nicht aus, weil letztere, wie in den vorigen Paragraphen ausführlich erörtert, eine Fläche bestimmt. Wohl aber kann man die Kurve als Schnitt, als Durchdringung zweier Flächen ansehen, wie die Gerade als Schnitt zweier Ebenen, den Kreis als Schnitt einer Ebene und einer Kugel. Dann müssen die Koordinaten jedes Punktes der Kurve den beiden Gleichungen dieser Flächen:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0 \qquad 1)$$

genügen und in diesem Sinne bezeichnet man diese Gleichungen als die beiden Gleichungen der Kurve. Also:

Die beiden Gleichungen einer Kurve sind die beiden Gleichungen von zwei Flächen, welche sich in der Kurve schneiden.

Zu dieser Definition ist aber noch zu bemerken:

Erstens: Die Darstellung 1) ist insofern unbestimmt, als nicht umgekehrt die beiden Flächen durch die vorgelegte Kurve eindeutig gegeben sind. Man hat vielmehr in ihrer Wahl eine sehr große Freiheit. Eine Gerade z. B. kann als Schnitt irgend zweier durch sie gehender Ebenen betrachtet werden, oder auch als Schnitt irgend zweier anderer Flächen, welche beide die Gerade enthalten (z. B. Zylinderflächen). Auch analytisch tritt dieser Sachverhalt sofort hervor, da man die Gleichungen 1) durch irgend zwei andere Gleichungen ersetzen kann, die aus 1) durch irgendwelche Verbindungen, z. B. durch Addieren, Multiplizieren usw. entstehen. Denn dann werden diese beiden neuen Gleichungen ebenfalls Flächen bestimmen. die durch die gegebene Kurve hindurchgehen, und es hindert also nichts, sie als Gleichungen derselben zu nehmen.

Zweitens: Es kann sehr wohl sein, daß die in 1) durch ihre Gleichungen gegebenen Flächen sich noch anderweitig schneiden, als in der vorgelegten Kurve. Wenn z. B. die gerade Linie als Schnitt einer Ebene mit einem Kreiszylinder betrachtet werden würde, so ist sie doch nur ein Teil dieses Schnittes, da noch eine zweite Schnittgerade vorhanden ist. Man muß daher, wenn möglich, in 1) zwei solche Gleichungen nehmen, daß die zugehörigen Flächen in der Tat nur die vorgelegte Kurve und keine andere gemeinsam haben. Gelingt dies aber nicht, so ist entweder die andere Kurve ausdrücklich auszuschließen oder noch eine dritte Gleichung hinzuzunehmen, derart, daß die dritte Fläche ebenfalls durch die gegebene Kurve geht, und daß der gemeinsame Schnitt aller drei Flächen nur die gegebene Kurve ist, während je zwei Flächen sich noch immer in einer fremden Kurve schneiden können.

Ein Beispiel wird dies am besten erläutern. Gegeben seien die beiden Flächen:

$$\text{a)}\quad x + xz - yz = 0,$$

$$\text{b)}\quad x(y+z) - y(y-z) = 0$$

(ein hyperbolisches Paraboloid und ein Kegel). Sie schneiden sich in der z-Achse, denn a) und b) werden identisch erfüllt, wenn $x = 0$, $y = 0$ und z beliebig. Vermutlich aber wird diese Gerade nur ein Teil des Schnittes beider Flächen bilden und es möge eben der andere Teil der eigentlich gesuchte sein.

Um zunächst nachzuweisen, daß er überhaupt vorhanden ist, berechne man aus a) und b):

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{1+z}, \quad \frac{x}{y} = \frac{y-z}{y+z}.$$

Liegt der Punkt nicht auf der z-Achse, dann ist $\frac{x}{y}$ nicht von der Form $\frac{0}{0}$, d. i. unbestimmt, und man erhält also:

$$\frac{z}{1+z} = \frac{y-z}{y+z}$$

oder:

$$\text{c)} \quad y - z - 2z^2 = 0.$$

Für den anderen Teil muß also auch die dritte Gleichung c) erfüllt sein. Nun folgt aus c):

$$\text{d)} \quad y = z + 2z^2$$

und nach Einsetzen in a):

$$\text{e)} \quad x = \frac{z^2 + 2z^3}{1+z}.$$

Da aber endlich durch Einsetzen von d) und e) auch b) zur Identität wird, so ist in d) und e) eine Darstellung des anderen Teiles (einer Kurve dritter Ordnung) gefunden, so daß für jeden Wert von z sofort x und y berechnet werden können. Der fremde, zu Anfang in a) und b) enthaltene gemeinsame Bestandteil, die z-Achse nämlich, ist dagegen in d) und e) vollständig eliminiert.

Man wird daher zuweilen bei der Darstellung 1) Umsicht üben müssen, um die vorgelegte Kurve rein und ohne Vermischung mit fremden Kurven zu erhalten. Immer aber bleibt zu Recht bestehen, daß jede Kurve ihre beiden Gleichungen habe:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \qquad 1)$$

Darstellung einer Kurve durch ihre Projektionen: Es sei $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ (Fig. 9) irgend eine Kurve im Raum. Man pflegt sie in der darstellenden Geometrie durch ihre beiden Projektionen (Grundriß und Aufriß) $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \ldots$, $R_1 R_2 R_3 R_4 \ldots$ in den beiden Projektionsebenen, hier xy- und xz-Ebene, zu bestimmen. Sehr häufig nimmt man als zwar nicht notwendige, aber doch sehr willkommene Ergänzung noch die Projektion $S_1 S_2 S_3 S_4 \ldots$ auf eine dritte, zu beiden senkrechte Ebene, hier die yz-Ebene, hinzu, die eben deswegen nicht notwendig ist, weil (im allgemeinen) die Kurve und damit auch die dritte Projektion durch die beiden ersten Projektionen bestimmt werden kann.

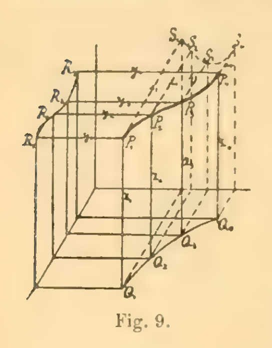


Fig. 9.

Analytisch aber stellt sich dieser Vorgang folgendermaßen dar: Die Projektion $Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \ldots$ hat zwei Gleichungen, wie jede Kurve im Raum. Die eine ist $z = 0$, die andere gehört dem projizierenden Zylinder $P_1 Q_1$, $P_2 Q_2$, $P_3 Q_3$, $P_4 Q_4 \ldots$ an. Da er auf der xy-Ebene senkrecht steht, darf seine Gleichung kein z enthalten (§ 5), und weil er durch die gegebene Kurve $P_1 P_2 P_3 P_4 \ldots$ geht, so muß sie aus 1) durch Herausschaffung, durch Elimination von z entstehen. Überträgt man diese Schlüsse auch auf die beiden anderen Projektionen, so folgt danach:

Eliminiert man aus 1) der Reihe nach erst x, dann y, dann z, so entstehen die Gleichungen:

$$\varphi_1(y, z) = 0, \quad \varphi_2(z, x) = 0, \quad \varphi_3(x, y) = 0 \qquad 2)$$

der drei projizierenden Zylinder, welche in Verbindung mit den drei Gleichungen:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

sofort die drei Projektionen selbst ergeben.

Wie bereits erwähnt, wird man im allgemeinen mit zwei Projektionen, etwa auf die xy- und die xz-Ebene, auskommen, aber in manchen Fällen lieber alle drei aufsuchen, wenn nämlich die beiden ersten ungünstig zueinander liegen. Dies ist sogar dann notwendig, wenn die Kurve in einer zur z-Achse senkrechten Ebene, also in einer Parallelebene zur xy-Ebene

liegt. Denn dann fallen die beiden ersten Gleichungen 2) mit der Gleichung der Ebene der Kurve, $z =$ constans, zusammen und es bedarf noch der dritten Gleichung, welche dann zugleich Gleichung der Kurve in ihrer eigenen Ebene ist.

Parameterdarstellung von Kurven. Wie die Flächen durch zwei, so können die Kurven im Raum durch einen Parameter, den wir t nennen wollen, dargestellt werden, so daß eine solche Kurve durch drei Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t) \tag{3}$$

definiert wird.

An sich ist sogar diese Darstellung, wenigstens formell, leicht zu erreichen. Man gehe etwa von den beiden Gleichungen 1) aus:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

und bezeichne irgend eine dritte Funktion von x, y, z mit t:

$$F_3(x, y, z) = t.$$

Entwickelt man aus diesen drei Gleichungen x, y, z, so werden diese als Funktionen von t bestimmt und die Gleichungen 3) sind gefunden.

Weit schwieriger aber ist die Frage nach einer wirklich angemessenen Parameterdarstellung, die in jedem besonderen Falle auch besonders angegriffen werden muß. Auch kann hierüber nur wiederholt werden, was bei dieser Gelegenheit im vorigen Paragraphen über die Flächen ausgesagt worden ist, daß nämlich eine solche Parameterdarstellung nicht immer leicht zu finden ist.

Wenn aber dieselbe vorliegt, so kann man rückwärts durch bloße Elimination zu den Projektionen oder auch zu den Gleichungen der Kurve gelangen. Denn eliminiert man t aus je zweien der Gleichungen 3), so entstehen die drei Gleichungen 2). Eliminiert man aber t unter Hinzuziehung aller drei Gleichungen 3), so entsteht eine Gleichung von der Form:

$$F(x, y, z) = 0,$$

also eine der Gleichungen der Kurve.

Ganz besonders wird die Parameterdarstellung der Kurven in der Mechanik bevorzugt. In der Tat, wenn es sich um die Bahn handelt, die irgend ein Punkt (Massenpunkt), der gegebenen Kräften ausgesetzt ist, beschreibt, so ist doch offenbar

das Endziel die Kenntnis des Ortes für jeden Augenblick, d. h. die Kenntnis der Koordinaten als Funktionen der Zeit. Somit ist hier die Zeit als Urvariable von vornherein gegeben und damit der Ansatz 3) mit der Bedeutung $t =$ Zeit (ausgedrückt in der Zeiteinheit [Sekunde] und gezählt von irgend einem Augenblick an in die Zukunft vorwärts als positiv und in die Vergangenheit zurück als negativ). Auch leitet man aus 3) nur in einfachen Fällen durch Elimination von t die Gleichungen der Bahn ab, zumal letztere meist gar nicht gebraucht werden. Als ein klassisches Beispiel hierfür sind die Bahnen der Planeten zu nennen, die nur in erster Annäherung Ellipsen sind, insofern man nämlich nur die allerdings überwiegende Anziehung der Sonne berücksichtigt und von den gegenseitigen Anziehungen der Planeten absieht. Zieht man aber auch diese in Betracht, so sind die Bewegungen durchaus nicht einfach. Die Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ in 3) werden schon an sich so schwer übersichtlich, daß ein Übergang zu den Endgleichungen der Bahnen durch Elimination von t praktisch ausgeschlossen ist.

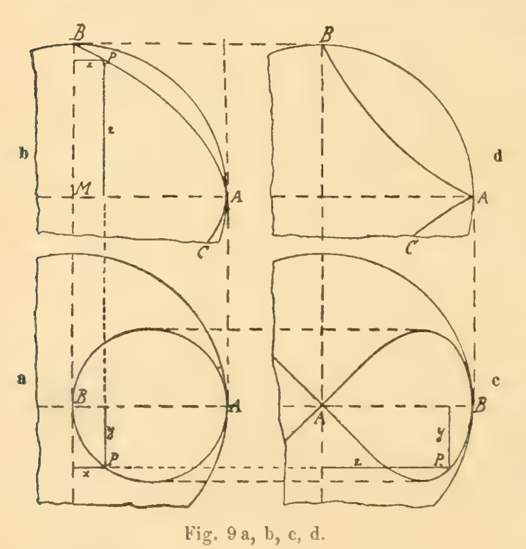


Fig. 9 a, b, c, d.

Wir wollen nun an einem nicht zu schwierigen, aber auch nicht zu einfachen Beispiel die verschiedenen Arten der analytischen Darstellung einer Raumkurve erläutern.

Gegeben sei eine Kugel mit dem Radius $= r$ und ein Kreiszylinder mit dem Durchmesser $= r$, der durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgeht. Es ist die Durchdringungskurve zu ermitteln (Fig. 9 a).

Macht man den Mittelpunkt der Kugel zum Koordinatenanfangspunkt, die durch ihn hindurchgehende Kante des Zylinders

zur z-Achse, so daß die xy-Ebene den Zylinder in seinem kreisförmigen Querschnitt schneidet, und läßt endlich die x-Achse nach dem Mittelpunkt dieses Kreises, die y-Achse also tangential an ihn gerichtet sein, so sind die Gleichungen der Kugel und des Zylinders:

$$\text{I)}\quad x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$
$$\text{II)}\quad x^2 + y^2 - rx = 0.$$

Man kann sie sofort als Gleichungen der Schnittkurve nehmen. Um die drei Projektionen zu finden, hat man der Reihe nach aus I) und II) x, y, z zu eliminieren. Da II) schon von z frei ist, so stellt diese Gleichung bereits die Projektion auf die xy-Ebene vor (Fig. 9a). Die Elimination von y wird sehr einfach durch Subtraktion bewerkstelligt. Es folgt:

$$\text{III)}\quad z^2 - r^2 + rx = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel bzw. des projizierenden parabolischen Zylinders (Fig. 9b). Auch die Elimination von x ist nicht schwer. Man berechne aus III):

$$x = \frac{r^2 - z^2}{r}$$

und setze in I) oder II) ein. Es folgt:

$$\text{IV)}\quad y^2 - z^2 + \frac{z^4}{r^2} = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer Kurve vierter Ordnung (Fig. 9c).

Bemerkungen: 1. Es könnte auffallen, daß die Projektion derselben Kurve auf die xy- und auf die xz-Ebene von der zweiten, auf die yz-Ebene aber von der vierten Ordnung ist. Aber jeder Punkt des Kreises II) ist die Projektion von zwei Punkten der Kurve (mit entgegengesetzt gleichen Werten von z) und ebenso ist jeder Punkt der Parabel III Projektion von zwei Punkten der Kurve (mit entgegengesetzt gleichen Werten von y). Also sind II und III eigentlich doppelt zu rechnen, wobei außerdem zu beachten ist, daß für die Parabel nur der Bogen BAC*) in Betracht kommt, weil sonst die beiden zugehörigen Werte von y offenbar imaginär werden müssen, wie man hinterher in der Tat leicht bestätigt. 2. Fast immer wird nach der Erfahrung des Verfassers die Projektion III nach dem

*) C soll der tiefste Punkt sein (Fig. 10).

„Augenmaß“ falsch beurteilt und etwa nach Art der Fig. 9d vorausgesetzt. Es ist dabei das Bestreben unverkennbar, der Tatsache gerecht zu werden, daß die Kurve in dem Punkt A, der ja sofort als „Doppelpunkt“ erkannt wird, nicht vertikal, d. h. parallel zur z-Achse, wie es nach der richtigen Fig. 9b scheinen könnte, sondern nach vorn und hinten schräg aufsteigt. Man muß sich erst vergegenwärtigen, daß in A die Tangentialebene an die Kugel (und Zylinder) vertikal und parallel zur yz-Ebene steht und daher auch die schrägen Richtungen in ihr sich vertikal projizieren müssen. Ebenso verleitet der in B und C tangentiale Verlauf der Kurve an den größten Kreis BC, der in Fig. 9a und 9b als Strich erscheint, fälschlich dazu, auch (wie in Fig. 9d gezeichnet) die Projektion tangential in B und C zu beginnen. Aber in B und C ist die Kurve horizontal, die Verkürzung also unendlich groß, und dies hat zur Folge, daß die wirkliche Berührung sich bei richtiger Zeichnung in ein schräges Herangehen, als ob die Kurve schneiden wollte, verwandelt. 3. Um die Richtungen der beiden Tangenten in A festzustellen, bedenke man, daß y und z in der Umgebung von A sehr klein sind und daher dort für die Gleichung IV) nur die niedrigsten Glieder, also diejenigen zweiten Grades in Betracht kommen. In der Umgebung von A verwandelt sich IV somit in:

$$y^2 - z^2 = 0, \quad z = \pm y,$$

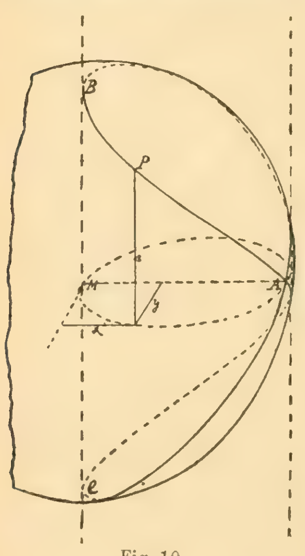


Fig. 10.

d. h. die Tangenten in A sind parallel zu den Halbierungslinien der Winkel zwischen der y- und der z-Achse und stehen also senkrecht aufeinander. 4. Augenscheinlich tritt in Fig. 9c die Gestalt der Kurve deutlicher hervor als in Fig. 9a und Fig. 9b. Noch wirksamer aber ist Fig. 10, welche eine schiefe Projektion (Verkürzung der x um die Hälfte) darstellt und in Verbindung mit der gezeichneten Kugel und dem durch den punktierten Kreis und zwei Kanten angedeuteten Kreis-

zylinder den „räumlichen“ Charakter der Kurve oder die „doppelte Krümmung“ bestens wiedergibt.

Zur Ergänzung wollen wir die Kurve noch von ihrem Doppelpunkte A aus durch einen Kegel projizieren. Macht man A zum Anfangspunkt und setzt demnach:

$$x = x_1 + r, \quad y = y_1, \quad z = z_1,$$

so verwandeln sich die Gleichungen I) und II) in:

$$\text{I}')\quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2\,r x_1 = 0,$$

$$\text{II}')\quad x_1^2 + y_1^2 + r x_1 = 0.$$

Das Kriterium für einen Kegel mit dem Anfangspunkt als Spitze ist nun nach § 5 die Homogenität der Gleichung, d. h. der gleiche Grad aller Glieder. Man muß also aus I′) und II′) eine solche Gleichung ableiten, was hier mit größter Leichtigkeit gelingt durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit $+2$ und Subtraktion der ersten. Es folgt:

$$\text{V})\quad x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 = 0.$$

Dies ist ein gerader Kreiskegel mit einem Öffnungswinkel von 45°. Schneidet man ihn durch die Tangentialebene in B (oder C), d. h. setzt $z_1 = r$, so erhält man den Kreis mit dem Radius r:

$$x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$$

als entsprechende Zentralprojektion der Kurve vom Punkte A auf die genannte Tangentialebene.

Bemerkung: Bisher sind vier Umdrehungsflächen zweiter Ordnung mit parallelen Achsen namhaft gemacht worden, die alle vier durch unsere Raumkurve hindurchgehen, nämlich die Kugel I, der Kreiszylinder II, der Kreiskegel V und der parabolische Zylinder III, den man ja auch ansehen kann als entstanden durch Umdrehung der Parabel um die unendlich ferne Gerade. Dies berechtigt zur Vermutung, daß es eine ganze Schar, ein ganzes „Büschel“ solcher Umdrehungsflächen gibt. In der Tat findet man sie alle durch lineare Verbindung von I) und II):

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 + \lambda\,(x^2 + y^2 - rx) = 0$$

oder nach Division mit $1 + \lambda$ und nach einer kleinen Umformung mit Hilfe der „quadratischen Ergänzungen“:

$$\left(x - \frac{r\lambda}{2\,(1+\lambda)}\right)^2 + y^2 + \frac{z^2}{1+\lambda} - r^2\frac{(\lambda+2)^2}{4\,(1+\lambda)^2} = 0,$$

also eine Umdrehungsfläche, deren Achse in der xz-Ebene parallel zur z-Achse, im Abstande $\frac{r \cdot \lambda}{2(1+\lambda)}$ von dieser liegt.

Um eine brauchbare Parameterdarstellung der Kurve zu gewinnen, kann man recht gut z selbst als Parameter wählen. Es folgt nach III) und IV):

$$\text{VI)} \qquad x = r - \frac{z^2}{r}, \quad y = \frac{z}{r} \cdot \sqrt{r^2 - z^2}, \quad z = z.$$

Setzt man $z = r \cdot \cos\varphi$, betrachtet also den Neigungswinkel des nach dem laufenden Punkt gerichteten Radius der Kugel mit der z-Achse als Parameter, so verwandelt sich VI) in:

$$\text{VII)} \quad x = r \cdot \sin^2\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi\cos\varphi, \quad z = r \cdot \cos\varphi.$$

Um hieraus schließlich noch eine rationale algebraische Darstellung zu geben, führe man die Tangente des halben Winkels ein, also:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = u, \quad \sin\varphi = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos\varphi = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

daher:

$$\text{VIII)} \quad x = \frac{4ru^2}{(1+u^2)^2}, \quad y = \frac{2ru(1-u^2)}{(1+u^2)^2}, \quad z = r \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Als zweites Beispiel für die analytische Darstellung von Raumkurven diene die allbekannte „Schraubenlinie", welche durch Abwickeln einer Ebene, in der eine Gerade gezeichnet ist, auf einen Kreiszylinder entsteht (Fig. 8, S. 57). Nennt man r den Radius des Zylinders, nimmt seine Achse als z-Achse, den Koordinatenanfangspunkt auf ihr beliebig, richtet dann die x-Achse nach dem in der xy-Ebene gelegenen Punkt der Schraubenlinie und bezeichnet mit α die ursprüngliche Neigung der Geraden gegen die xy-Ebene, woraus die Ganghöhe $h = 2\pi r \operatorname{tg}\alpha$ folgt, so findet man sofort nach Einführung des Zentriwinkels φ als Parameter:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \cdot \varphi.$$

Diese Parameterdarstellung stimmt der Form nach vollständig mit der im vorigen Paragraphen gegebenen Darstellung der Schraubenfläche überein [Gleichung 6), S. 57], nur daß r

statt ϱ steht und r jetzt kein Parameter, sondern eine Konstante, der Radius des Zylinders sein soll.

Je nachdem h positiv oder negativ, haben wir die rechtsdrehende oder die linksdrehende Schraube (deren Sinn man bekanntlich durch Vertauschung der Richtung der z-Achse [durch Umdrehen der Schraube] nicht ändern kann). Sollen noch die drei Projektionen der Schraubenlinie gefunden werden, so ist nach der Theorie aus je zwei der drei Gleichungen φ zu eliminieren. Man findet so:

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0, \quad y = r \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{h} \cdot z\right), \quad x = r \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{h} \cdot z\right).$$

Die erste Gleichung ist nichts anderes als die Gleichung des Schraubenzylinders. Die beiden anderen Gleichungen stellen Wellenlinien vor, als welche sich in der jedem Leser bekannten Weise die Schraubenlinien im Aufriß darstellen.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben ein Würfel $ABCDEFGH$ (Fig. 7, S. 40). Gesucht der geometrische Ort aller Punkte, welche von den drei Kanten FG, CD und AE gleichweit entfernt sind.

2. Von einem Hauptwasserleitungsrohr (Radius R) zweigt eine kleine Röhre (Radius r) senkrecht so ab, daß die untersten Kanten beider Zylinder sich treffen. Es ist die Durchdringungskurve analytisch darzustellen.

3. Gegeben der Würfel wie in Aufgabe 1). Durch die Kante FG wird eine Ebene gelegt und die Mitte M zwischen den Durchschnittspunkten P_1 und P_2 mit den beiden Kanten DC und EA konstruiert. Welche Kurve beschreibt diese Mitte, wenn die Ebene sich um die Kante FG dreht?

4. Drei Massenpunkte bewegen sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf drei zueinander windschiefen Geraden. Welche Kurve beschreibt ihr Schwerpunkt?

Zweiter Abschnitt.

§ 7 bis § 12.

§ 7.

Die Ebene. Verschiedene Formen ihrer Gleichung. Die Hessesche Normalform. Lot von einem Punkte auf eine Ebene. Ebenenkoordinaten.

Wie bereits in § 4 nachgewiesen, stellt jede Gleichung ersten Grades:

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{1}$$

eine Ebene E vor. Umgekehrt besitzt jede Ebene eine Gleichung ersten Grades.

Ist z. B. $d = 0$, so geht E durch den Anfangspunkt. Ist $c = 0$, so steht E auf der xy-Ebene senkrecht, ist $b = 0$, so auf der xz-, $a = 0$, auf der yz-Ebene. Sind a und $b = 0$, so ist E zur xy-Ebene parallel usw. Sind a, b, c alle drei sehr klein, so müssen x, y, z alle drei oder doch zum Teil sehr groß werden. Geht man zur Grenze, also $\lim a = 0$, $\lim b = 0$, $\lim c = 0$, so folgt:

Die Gleichung

$$0x + 0y + 0z + d = 0$$

stellt „die unendlich ferne Ebene" vor. (Vgl. I, § 9.)

Zur Konstruktion einer durch ihre Gleichung gegebenen Ebene E genügt die Bestimmung von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten.

Ist z. B. die Gleichung gegeben:

$$5x - 3y + 7z - 9 = 0$$

und wählt man in der xy-Ebene die drei Punkte:

$$Q_1(+2, -3), \quad Q_2(-1, +4), \quad Q_3(-3, -8),$$

so folgen die Werte von z der zugehörigen Punkte P_1, P_2, P_3 in E:

$$-\frac{10}{7}, \quad +\frac{26}{7}, \quad 0.$$

Die drei Punkte sind daher:

$$P_1\left(+2, -3, -\frac{10}{7}\right), \; P_2\left(-1, +4, +\frac{26}{7}\right), \; P_3(-3, -8, 0).$$

Sehr häufig nimmt man die drei Schnittpunkte A, B, C mit den Achsen, die von dem Anfangspunkt die Abstände p, q, r (selbstverständlich algebraisch, d. h. positiv oder negativ) haben mögen. So sind diese drei Punkte:

$$A(p, 0, 0), \quad B(0, q, 0), \quad C(0, 0, r).$$

Durch Einsetzen in 1) daher sofort:

$$p = -\frac{d}{a}, \; q = -\frac{d}{b}, \; r = -\frac{d}{c}. \tag{2}$$

Will man p, q, r in die Gleichung 1) einführen, so dividiere man durch $-d$. Es folgt:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0. \quad \text{(Siehe I, § 9.)} \tag{3}$$

Dies ist eine spezielle Form der Gleichung insofern, als die Konstante $= -1$ gemacht wurde. Sie versagt, wenn die Ebene durch den Anfangspunkt geht, weil dann p, q und $r = 0$, also $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{r}$ unendlich werden. In der Tat ist hier $d = 0$ und die Division durch $-d$ nicht gestattet.

Eine zweite spezielle Form entsteht durch explizite Darstellung von z:

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}.$$

Die Konstante ist $= r$ nach 2). Um die Bedeutung der beiden anderen Koeffizienten zu ermitteln, schneide man die Ebene durch die xz- und die yz-Ebene. Es entstehen dann die beiden Geraden:

$$y = 0, \quad z = -\frac{a}{c}x - \frac{d}{c}; \quad x = 0, \quad z = -\frac{b}{c}y - \frac{d}{c}$$

und daher (nach I, § 9):

$$-\frac{a}{c} = \operatorname{tg}\varphi; \quad -\frac{b}{c} = \operatorname{tg}\psi,$$

wo φ und ψ die Richtungswinkel der Schnittgeraden AC und BC in der xz- und yz-Ebene sind, wenn dort die $+x$- bzw. $+y$-Achse als Anfangsrichtungen genommen werden. (Drehungs-

sinn positiv von $+x$ nach $+z$ und von $+y$ nach $+z$ um 90°.) Führt man daher die Bezeichnungen ein:

$$\operatorname{tg}\varphi = m, \quad \operatorname{tg}\psi = n$$

als die beiden „Richtungskonstanten“ der Ebene, wenn man sie so nennen will, so wird ihre Gleichung:

$$z = mx + ny + r. \tag{4}$$

Damit ist eine zweite spezielle Form entwickelt und auch die Bedeutung der drei Koeffizienten bestimmt worden. Auch diese Form versagt in besonderen Fällen, dann nämlich, wenn die Ebene auf der xy-Ebene senkrecht steht.

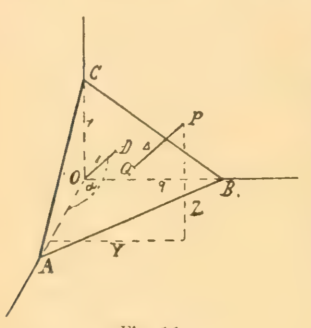


Fig. 11.

Ein gleiches gilt für die explizite Darstellung von x oder y. Immer wird die betreffende Form für besondere Lagen der Ebene unbrauchbar und es liegt daher nahe genug, die Hessesche Normalform (I, § 9) von der Ebene auf den Raum zu übertragen.

Man nimmt dann als Bestimmungsstücke von E das Lot δ vom Anfangspunkt und seine Richtungswinkel α, β, γ (Fig. 11). Die Betrachtung der drei rechtwinkligen Dreiecke mit p, q, r als Hypotenusen, δ als gemeinsamer Kathete und α, β, γ als eingeschlossenen Winkeln gibt sofort:

$$\delta = p \cdot \cos\alpha = q \cdot \cos\beta = r \cdot \cos\gamma;$$

$$p = \frac{\delta}{\cos\alpha}, \quad q = \frac{\delta}{\cos\beta}, \quad r = \frac{\delta}{\cos\gamma}.$$

Durch Einsetzen in die Form 3) und Multiplizieren mit δ entsteht dann ohne weiteres die Hessesche Normalform:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0, \tag{5}$$

die für keine wirkliche, d. h. weder imaginäre noch unendlich ferne Ebene versagen kann, da $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zwischen -1 und $+1$ liegen und auch δ nie unendlich ist.

Um die allgemeine Form 1) in die Normalform 5) zu verwandeln, führe man, ganz wie in I, § 9, den vermittelnden Faktor λ ein und setze also an:

$$\lambda \cdot ax + \lambda \cdot by + \lambda \cdot cz + \lambda \cdot d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta.$$

Dann muß sein:

$$\lambda a = \cos\alpha, \quad \lambda b = \cos\beta, \quad \lambda c = \cos\gamma, \quad \lambda d = -\delta.$$

Zur Bestimmung von λ dient die Gleichung 3), § 1, die sofort ergibt:

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Die Normalform wird daher:

$$\frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0, \tag{5a}$$

d. h.: Um die allgemeine Form 1) in die Normalform zu verwandeln, dividiere man durch $\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Das Vorzeichen der Wurzel ist so zu wählen, daß nach 5) das letzte Glied negativ werde; also positiv, wenn d negativ, negativ, wenn d positiv. Hiernach ist:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \delta = -\frac{d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{6}$$

Beispiel: $5x - 3y + 7z + 9 = 0$.

Man dividiere durch $-\sqrt{(+5)^2 + (-3)^2 + (+7)^2} = -\sqrt{83}$, so wird die Normalform:

$$-\frac{5}{\sqrt{83}}x + \frac{3}{\sqrt{83}}y - \frac{7}{\sqrt{83}}z - \frac{9}{\sqrt{83}} = 0.$$

Im besonderen aber bemerke man die überaus wichtige Proportion:

$$a : b : c = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma, \tag{6a}$$

d. h.: Die drei Koeffizienten von x, y und z in der Gleichung einer Ebene E sind proportional zu den Richtungskosinus derjenigen Richtung, welche auf E senkrecht steht.

Lot von einem Punkte auf eine Ebene. Die große Bedeutung der Hesseschen Normalform zeigt sich namentlich bei der analytischen Behandlung der folgenden fundamentalen Aufgabe:

Gegeben die Gleichung einer Ebene E in der Normalform:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta = 0$$

und ein beliebiger Punkt $P(X, Y, Z)$ im Raume. Gesucht das Lot $\varDelta$ von P auf E.

Lösung (Fig. 11): Man projiziere die gebrochene Linie X-Y-Z auf die Lotrichtung. Die Projektionen der Einzelstrecken sind:

$$X \cdot \cos\alpha, \quad Y \cdot \cos\beta, \quad Z \cdot \cos\gamma.$$

Andererseits ist die Gesamtprojektion augenscheinlich $= \delta + \varDelta$. Also:

$$X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \cos\beta + Z \cdot \cos\gamma = \delta + \varDelta,$$

und somit:

$$\varDelta = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \cos\beta + Z \cdot \cos\gamma - \delta. \qquad 7)$$

d. h. man erhält das Lot von einem Punkte P auf eine Ebene E durch Einsetzen der Koordinaten von P in die linke Seite der Gleichung von E, wenn diese in der Hesseschen Normalform gegeben ist.

Es ist aber noch zu bemerken, daß 7) das Lot $\varDelta$ mit dem Vorzeichen $+$ oder $-$ gibt, je nachdem P und O auf verschiedenen oder auf derselben Seite von E liegen. (Vgl. I. § 9.)

Eine zweite, noch einfachere Ableitung von 7) ist die folgende: Man denke sich durch P die Ebene E_1 parallel zu E. Dann bleiben α, β, γ unverändert, während statt δ zu setzen ist: $\delta + \varDelta$. Die Gleichung von E_1 ist daher:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - (\delta + \varDelta) = 0.$$

E_1 geht aber durch $P(X, Y, Z)$. Nach Einsetzen und Berechnen von $\varDelta$ entsteht sofort wieder die Formel 7).

Ist die Gleichung von E in der allgemeinen Form gegeben, so wandelt sich 7) nach 5a) in:

$$\varDelta = \frac{aX + bY + cZ + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \qquad 7\text{a})$$

Beispiel: $E: 5x - 3y + 7z + 9 = 0$. $P(+1, -2, -3)$.

$$\varDelta = \frac{5(+1) - 3(-2) + 7(-3) + 9}{-\sqrt{83}} = +\frac{13}{\sqrt{83}}.$$

d. h. die Länge des Lotes ist $= \frac{13}{\sqrt{83}}$ und P und O liegen auf verschiedenen Seiten von E.

Aufgabe: Gegeben E durch ihre Gleichung und $P(X, Y, Z)$. Der Fußpunkt $Q(x, y, z)$ des Lotes $\varDelta$ ist zu ermitteln.

Lösung: Da er in E liegt, erfüllen seine Koordinaten zunächst die Gleichung von E:

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Berechnet man die Verhältnisse der Richtungskosinus des Lotes einerseits nach 6a), andererseits nach 11a), § 1, so folgt weiter:

$$x - X : y - Y : z - Z = a : b : c,$$

oder nach Einführung des Proportionalitätsfaktors:

$$x = X + \lambda a, \quad y = Y + \lambda b, \quad z = Z + \lambda c. \qquad 8)$$

λ wird durch Einsetzen in die Gleichung der Ebene bestimmt. Man erhält:

$$\lambda = -\frac{aX + bY + cZ + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

und damit nach 8) die Koordinaten des Fußpunktes Q.

Hieran knüpft sich ein dritter Beweis der Formel 7) bzw. 7a), da nun Δ als Entfernung von P und Q nach der Grundformel 10), § 1 berechnet werden kann:

$$\Delta = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2} = \pm \lambda \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

worauf nach Einsetzen von λ sofort die Formel 7a) wieder erhalten wird, freilich ohne Rücksicht auf die Bedeutung des Vorzeichens von Δ.

Die Koordinaten der Ebene. Was in der analytischen Geometrie der Ebene die beiden Koordinaten u und v einer Geraden (I, § 11), das sind im Raume die drei Koordinaten u, v, w einer Ebene E, nämlich die negativen und reziproken Werte der Abschnitte auf den Achsen:

$$u = -\frac{1}{p}, \quad v = -\frac{1}{q}, \quad w = -\frac{1}{r}. \qquad 9)$$

Wie dort, so rechtfertigt sich auch hier diese Wahl durch die Rücksicht auf die spezielle Form 3), welche nun die Gestalt erhält:

$$ux + vy + wz + 1 = 0. \qquad 10)$$

Bemerkung: Für die Richtungswinkel α, β, γ des Lotes folgt aus 6a) sofort:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = u : v : w. \qquad 11)$$

Geht die Ebene durch den Anfangspunkt, so werden u, v, w im allgemeinen unendlich und man muß sich auf ihre Verhältnisse $u : v : w$ beschränken, gerade so wie bei einem unendlich fernen Punkt auf die Verhältnisse seiner Koordinaten. Die unendlich ferne Ebene aber hat die Koordinaten $u = 0, v = 0, w = 0$.

Werden u, v, w als veränderlich, als variabel, angesehen, so ändert E ihre Lage im Raume. E dreht sich z. B. um die Schnittgerade mit der xy-Ebene, wenn u und v als gegeben, w als veränderlich angesehen werden. Setzt man nur eine Koordinate, etwa u als gegeben, v und w als veränderlich, so dreht sich E um den Schnittpunkt mit der x-Achse.

Irgend eine Gleichung ersten Grades endlich:

$$Au + Bv + Cw + D = 0, \tag{12}$$

bestimmt ganz allgemein ein Ebenenbündel im Raum, d. h. die Gesamtheit aller Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt hindurchgehen. Denn 12) kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{A}{D} \cdot u + \frac{B}{D} \cdot v + \frac{C}{D} \cdot w + 1 = 0. \tag{13}$$

Dieser Punkt, das Zentrum des Ebenenbündels, hat also nach 10) die Koordinaten:

$$x = \frac{A}{D}, \quad y = \frac{B}{D}, \quad z = \frac{C}{D}. \tag{14}$$

(Ist $D = 0$, so liegt das Zentrum unendlich fern. Das Bündel enthält dann alle Ebenen, welche eine gegebene Richtung enthalten.)

Überhaupt spielt jetzt die Gleichung 10) eine Doppelrolle. Setzt man in ihr, wie bisher, u, v, w als gegeben, x, y, z als veränderlich voraus, so stellt sie die Gleichung einer Ebene vor, d. h. sie wird für alle Punkte erfüllt, welche in dieser Ebene liegen. Setzt man aber nun umgekehrt x, y, z als gegeben und u, v, w als veränderlich, so muß sie als Gleichung eines Punktes angesehen werden, weil sie für alle Ebenen u, v, w erfüllt wird, welche durch ihn hindurchgehen. Aber ganz allgemein aufgefaßt, ist 10) die Bedingung, daß der Punkt $P(x, y, z)$ auf der Ebene $E(u, v, w)$ liege.

Noch allgemeiner indessen ist die Formel 7a), welche hier lautet:

$$\Delta = \frac{ux + vy + wz + 1}{-\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}, \tag{7b}$$

denn sie gibt das Lot von einem beliebigen Punkte $P(x, y, z)$ auf eine beliebige Ebene $E(u, v, w)$.

Transformation der Ebenenkoordinaten. Die mit einem Wechsel des Koordinatensystems verbundene Transformation der Ebenenkoordinaten leitet man am einfachsten auf folgende Weise ab:

Es seien u, v, w die Koordinaten einer Ebene E, also:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

ihre Gleichung. Setzt man in diese die Formeln 15), § 3 für die Transformation der Punktkoordinaten ein und ordnet nach x', y', z', so verwandelt sie sich in:

$$(a_1 u + b_1 v + c_1 w)\,x' + (a_2 u + b_2 v + c_2 w)\,y' + (a_3 u + b_3 v + c_3 w)\,z' \\ + (au + bv + cw + 1) = 0.$$

Bezeichnet man andererseits mit u', v', w' die Koordinaten von E im neuen System, so muß ihre Gleichung werden:

$$u'x' + v'y' + w'z' + 1 = 0.$$

Daher, nach Vergleichung mit der vorigen Formel:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{a_1 u + b_1 v + c_1 w}{au + bv + cw + 1}, \\ v' &= \frac{a_2 u + b_2 v + c_2 w}{au + bv + cw + 1}, \\ w' &= \frac{a_3 u + b_3 v + c_3 w}{au + bv + cw + 1}. \end{aligned} \qquad 15)$$

(Vgl. I, § 11.)

Wie man sieht, sind diese Transformationen auch linear, aber gebrochen linear, d. h. sie werden durch Brüche geliefert, deren Zähler und deren gemeinsamer Nenner vom ersten Grade sind. Nur wenn $a = b = c = 0$, d. h. wenn der Anfangspunkt beibehalten worden ist, wird der Nenner $= 1$ und die Formeln 15) geben ganze, homogene und lineare Ausdrücke.

Gleichungen von Flächen in Ebenenkoordinaten. Wie vorhin gezeigt, stellt eine Gleichung ersten Grades in Ebenenkoordinaten:

$$Au + Bv + Cw + D = 0$$

einen Punkt dar, insofern alle Ebenen, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen, und nur diese allein, durch ihn hindurchgehen. Was bedeutet nun aber eine beliebige Gleichung in Ebenenkoordinaten?

$$F(u, v, w) = 0. \qquad 16)$$

Daß eine solche Gleichung nichts mehr und nichts weniger als die Gesamtheit aller Ebenen umfaßt, deren Koordinaten eben diese Gleichung erfüllen, ist weiter nichts als eine Definition. Die Frage aber ist, wie man sich eine solche Gesamtheit vorzustellen habe.

Sie ist „zweidimensional", denn man wird im allgemeinen zwei Koordinaten u und v willkürlich wählen und w darauf durch Einsetzen in 16) ermitteln können. Schwieriger aber ist der Nachweis, daß sie identisch mit der Gesamtheit aller Ebenen ist, welche eine mit der Gleichung 16) mitbestimmte, aber erst noch zu ermittelnde Fläche berühren. Auch kann er nur mit Benutzung der Prinzipien der Differential- und Integralrechnung streng geführt werden.

[Es sei u, v, w irgend eine Ebene E, welche der Bedingung 16) genügt, und U, V, W eine zweite solche, die aber der ersten „unendlich benachbart" ist, so daß die Differenzen $U-u$, $V-v$, $W-w$ wie üblich mit du, dv, dw zu bezeichnen sind. Differentiiert man aber 16), so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial F}{\partial w} \cdot dw = 0,$$

d. h.

$$(U-u) \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + (V-v) \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + (W-w) \cdot \frac{\partial F}{\partial w} = 0$$

oder, wenn zur Abkürzung:

$$-u \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - v \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - w \cdot \frac{\partial F}{\partial w} = F_1$$

gesetzt wird:

$$U \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + V \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + W \cdot \frac{\partial F}{\partial w} + F_1 = 0.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf U, V, W linear. Man kann daher nach 12) sagen, daß alle Ebenen der durch eine Gleichung 16) bestimmten Gesamtheit, welche einer unter ihnen, E, unendlich benachbart sind, durch einen Punkt P (neben den Berührungspunkt mit der Fläche) hindurchgehen, dessen Koordinaten nach 13) und 14) durch die Gleichungen gegeben werden:

$$x = \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}, \quad y = \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial v}, \quad z = \frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial w}, \tag{17}$$

aus denen nach Einsetzen des Wertes von F_1 die Identität:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

folgt und folgen muß, da P auf E liegt.

Werden nun aus 16) und 17) u, v und w eliminiert, so bleibt eine Endgleichung in x, y, z:

$$\varphi\,(x, y, z) = 0, \tag{18}$$

also die Gleichung einer Fläche in Punktkoordinaten, welche von allen Ebenen, die der Gleichung 16) genügen, berührt wird.

Ist aber umgekehrt eine Fläche durch ihre Gleichung in Punktkoordinaten gegeben:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \qquad \mathbf{18)}$$

so findet man ganz ebenso die Koordinaten der zu dem Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche zugehörenden Berührungsebene $E(u, v, w)$ durch die entsprechenden Gleichungen:

$$u = \frac{1}{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{1}{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{1}{\varphi_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wo φ_1 die Abkürzung für:

$$-\left(x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)$$

bedeutet. Werden aus diesen Ausdrücken und der Gleichung $\varphi(x, y, z) = 0$ nun xyz eliminiert, so bleibt eine Endgleichung in uvw:

$$F(u, v, w) = 0, \qquad \mathbf{16)}$$

welche alle Berührungsebenen umfaßt und somit als Gleichung derselben Fläche in Ebenenkoordinaten angesehen werden kann.]

Somit hat jetzt jede Fläche im allgemeinen zwei Arten von Gleichungen, nämlich eine Gleichung in Punktkoordinaten, als analytischen Ausdruck für alle Punkte, welche auf der Fläche liegen, und eine Gleichung in Ebenenkoordinaten, als analytischen Ausdruck für alle Ebenen, welche die Fläche berühren oder umhüllen.

Zuweilen kann man bei Übergang von der einen zur anderen Gleichung die Differentialformeln umgehen, wie z. B. bei einer Kugel oder auch, freilich mit größerem Aufwand von Rechnung, bei irgend einer anderen Fläche zweiter Ordnung. Es sei $M(abc)$ der Mittelpunkt und r der Radius einer Kugel, also:

$$\varphi(x,y,z) \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0 \qquad \mathbf{18a)}$$

ihre Gleichung in Punktkoordinaten. Hier fällt die Bedingung, daß eine Ebene $E(u,v,w)$ die Fläche berühre, mit der Bedingung zusammen, daß E von M den Abstand r habe. Dies gibt nach 7b) auf der Stelle die Gleichung:

$$r = \frac{au + bv + cw + 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

oder nach Fortschaffung des Nenners und der Wurzel:

$$F(u,v,w) \equiv (u^2 + v^2 + w^2)\, r^2 - (au + bv + cw + 1)^2 = 0, \qquad \mathbf{16a)}$$

und diese Formel ist nichts anderes, als die Gleichung derselben Kugel in Ebenenkoordinaten.

Die Kugel hat also (wie die anderen Flächen zweiter Ordnung auch) in Punkt- und in Ebenenkoordinaten Gleichungen von demselben, dem zweiten Grade. Daß diese Übereinstimmung des Grades aber nicht verallgemeinert werden kann, geht schon daraus hervor, daß die Ebene in Punktkoordinaten eine Gleichung ersten Grades, in Ebenenkoordinaten aber überhaupt keine Gleichung, sondern nur ihre drei Koordinaten u, v, w besitzt; genau wie reziprok der Punkt in Punktkoordinaten keine Gleichung, sondern seine drei Koordinaten x, y, z und in Ebenenkoordinaten eine Gleichung ersten Grades hat.

Deshalb unterscheidet man die Ordnung einer Fläche, d. h. den Grad ihrer Gleichung in Punktkoordinaten von ihrer Klasse, d. h. dem Grad ihrer Gleichung in Ebenenkoordinaten. So ist eine Ebene eine Fläche erster Ordnung und nullter Klasse, der Punkt eine Fläche nullter Ordnung und erster Klasse, die Kugel aber eine Fläche zweiter Ordnung und zweiter Klasse.

Natürlich gibt der Begriff der Gleichung einer Fläche in Ebenenkoordinaten zu Bemerkungen Veranlassung, die den in § 4 und 5 gemachten entsprechen. Da sich aber später (§ 12) Gelegenheit finden wird, die wichtigsten Grenzfälle, nämlich die „abwickelbaren" Flächen, mit den Spezialfällen des Kegels und Zylinders besonders zu behandeln, so mag es hier mit der ausführlichen allgemeinen Begründung dieses Begriffes genug sein.

Übungsaufgaben.

1. Eine Ebene geht durch $P_0(+1, +1, -1)$, hat von $P_2(-4, +5, +8)$ den Abstand 1 und von $P_2(+3, +4, +2)$ den Abstand 2. Wie lautet ihre Gleichung?

2. Gegeben drei zueinander windschiefe Gerade l_0, l_1 und l_2. Durch den Anfangspunkt eine Ebene zu legen, welche l_0 in P_0, l_1 in P_1, l_2 in P_2 so schneidet, daß die drei Dreiecke OP_1P_2, OP_2P_0, OP_0P_1 zueinander ein gegebenes Verhältnis $n_0 : n_1 : n_2$ haben*). Die Untersuchung ist so weit zu führen, bis das Vorhandensein einer und nur einer Lösung erwiesen ist.

3. Eine Ebene geht durch die drei Punkte $P_0(a, b, c)$, $P_1(b, c, a)$, $P_2(c, a, b)$. Wie lautet die Gleichung der durch sie gehenden Ebene? Wie liegen die drei Punkte in dieser Ebene?

*) Diese Aufgabe spielt in der Astronomie bei der Bestimmung einer Bahn aus drei Beobachtungen eine große Rolle (zweites Kepplersches Gesetz).

§ 8.

Zwei Ebenen. Ihr Neigungswinkel und ihre Schnittgerade. Das Ebenenbüschel und die drei Elementargebilde erster Stufe. Drei Ebenen. Ihr Durchschnittspunkt. Ebenenbündel. Die beiden Elementargebilde zweiter Stufe. Vier Ebenen. Bedingung, daß sie sich in einem Punkte schneiden.

Aufgabe: Gegeben zwei Ebenen E_1 und E_2 durch ihre Gleichungen:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ U_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0. \end{aligned} \qquad 1)$$

Es ist der (oder vielmehr es sind die) Winkel zu bestimmen, unter welchen sie sich schneiden.

Lösung. Die Richtungswinkel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ der beiden Lote werden nach 6), § 7 ermittelt. Der Winkel φ zwischen den Ebenen ist aber gleich dem Winkel φ zwischen den Loten. Die Formel 13), § 1 gibt daher sofort:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{+\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \qquad 2)$$

Im besonderen folgt daher für $\varphi = 90^0$, $\cos\varphi = 0$ der wichtige Satz:

Zwei Ebenen stehen senkrecht aufeinander, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0. \qquad 2a)$$

Zur Prüfung dieser Formel kann man z. B. die erste Ebene mit der xy-Ebene zusammenfallen lassen. Es wird dann $a_1 = b_1 = 0$, da ihre Gleichung ist: $z = 0$. Die Bedingung 2a) gibt dann, da c_1 nicht verschwindet, $c_2 = 0$, und in der Tat steht eine Ebene auf der xy-Ebene senkrecht, wenn in ihrer Gleichung die Koordinate z nicht vorkommt.

Aufgabe: Gegeben zwei Ebenen durch ihre Gleichungen 1). Es ist ihre Schnittgerade l zu ermitteln.

Lösung. Man wende nach § 6 die Methode der Projektionen an, eliminiere also aus 1) der Reihe nach x, dann y‘ dann z durch Multiplikation der beiden Gleichungen mit $-a_2$ und a_1, bzw. $-b_2$ und b_1 oder $-c_2$ und c_1 und Addition.

Werden zur kürzeren Schreibweise die Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned}(bc) &= b_1 c_2 - c_1 b_2, \quad (ca) = c_1 a_2 - a_1 c_2, \quad (ab) = a_1 b_2 - b_1 a_2,\\ (ad) &= a_1 d_2 - d_1 a_2, \quad (bd) = b_1 d_2 - d_1 b_2, \quad (cd) = c_1 d_2 - d_1 c_2,\end{aligned} \qquad 3)$$

und setzt man fest, daß $(cb) = -(bc)$ usw., so erhalten die Gleichungen der Projektionen die übersichtliche Gestalt:

$$\begin{aligned}(ba)y + (ca)z + (da) &= 0,\\ (cb)z + (ab)x + (db) &= 0,\\ (ac)x + (bc)y + (dc) &= 0,\end{aligned} \qquad 3a)$$

aus denen man nach Belieben zwei herausgreifen kann. Der Vollständigkeit wegen möge auch noch die durch den Anfangspunkt gehende projizierende Ebene hinzugefügt werden, die aus 1) durch Elimination des konstanten Gliedes entsteht. Sie wird:

$$(ad)x + (bd)y + (cd)z = 0. \qquad 3b)$$

Die vier Gleichungen 3a) und 3b) enthalten, vom Vorzeichen abgesehen, nur die sechs Verbindungen 3) als Koeffizienten. Auch bestimmen je zwei von ihnen die Gerade. Die beiden anderen müssen daher aus ihnen folgen, so z. B. die dritte von 3a) aus den beiden ersten durch Elimination von z. Diese Elimination führt aber sofort zu dem Ergebnis:

$$-(ab)(ca)x + (ba)(cb)y + [(da)(cb) - (db)(ca)] = 0,$$

oder nach Division durch (ab), wenn man bedenkt, daß $(ba) = -(ab)$ usw.

$$(ac)x + (bc)y - \frac{(da)(bc) + (db)(ca)}{(ab)} = 0.$$

Dies muß die dritte der Gleichungen 3a) sein. Die Koeffizienten von x und y stimmen schon unmittelbar überein. Die Vergleichung der Konstanten aber gibt die folgende, sehr merkwürdige und eigenartige Beziehung zwischen den sechs Koeffizienten 3):

$$(da)(bc) + (db)(ca) + (dc)(ab) \equiv 0, \qquad 4)$$

deren Richtigkeit man hinterher leicht durch Einsetzen der Ausdrücke 3) und Auflösen der Klammern bestätigt. Und wie man auch aus zwei der Gleichungen 3a) und 3b) eine dritte abzuleiten versucht, immer wird man diese Identität wieder finden. Sie ist auch die einzige, welche die sechs Größen 3) miteinander verknüpft, solange man die acht Koeffizienten in 1) ganz willkürlich annimmt.

Handelt es sich nur um die Richtung $\alpha\beta\gamma$ von l im Raum, so werden nur die drei ersten der (Größen 3) gebraucht. Denn da diese Richtung zu den Loten auf E_1 und E_2 senkrecht steht und deren Richtungen nach 6), § 7 bestimmt werden, so gibt die Bedingung des Senkrechtstehens (15, § 1):

$$a_1 \cos\alpha + b_1 \cos\beta + c_1 \cos\gamma = 0,$$
$$a_2 \cos\alpha + b_2 \cos\beta + c_2 \cos\gamma = 0,$$

also:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (bc):(ca):(ab). \qquad 5)$$

Das Ebenenbüschel. Sind $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$ die Gleichungen irgend zweier Ebenen E_1 und E_2, so stellt offenbar jede Gleichung, die aus ihnen durch lineare Verbindung entstanden ist, also jede Gleichung von der Form:

$$U_1 + \lambda U_2 = 0, \quad \text{oder auch:} \quad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0, \qquad 6)$$

eine dritte Ebene E dar, welche durch die Schnittgerade l von E_1 und E_2 hindurchgeht (vgl. I, § 10). Denn für jeden Punkt von l sind die beiden Gleichungen 1), also auch die Gleichung 6) erfüllt.

Für $\lambda = 0$ fällt E mit E_1, für $\lambda = \infty$ oder $\frac{1}{\lambda} = 0$ mit E_2 zusammen. Variiert man λ von $-\infty$ bis $+\infty$, so dreht sich E um l und beschreibt ein Ebenenbüschel, d. h. die Gesamtheit aller Ebenen, welche durch ein und dieselbe Gerade, die Achse des Büschels, gehen. Daher:

Die Gleichung 6), in welcher U_1 und U_2 nach 1) irgend zwei Ausdrücke ersten Grades in xyz sind, ist der analytische Ausdruck für ein Ebenenbüschel.

Setzt man U_1 und U_2 in der Hesseschen Normalform voraus, so ist λ gleich dem positiven oder negativen Verhältnis der beiden Lote, die man von irgend einem in E liegenden Punkte auf E_1 und E_2 fällen kann, da aus 6) folgt:

$$\lambda = -\frac{U_1}{U_2}.$$

λ ist also in diesem Falle auch gleich dem einfachen Sinusverhältnis der beiden Winkel, in welche der Winkel zwischen E_1 und E_2 durch E geteilt wird (vgl. I, § 10). Setzt man aber U_1 und U_2 in der Form 10), § 7 voraus:

$$U_1 \equiv u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1, \qquad U_2 \equiv u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1,$$

so hat man noch $U_1 + \lambda U_2$ durch $1 + \lambda$ zu dividieren, um die Gleichung von E in dieselbe Form zu bringen. D. h.:

Sind $E_1(u_1 v_1 w_1)$, $E_2(u_2 v_2 w_2)$ gegeben. so werden die Koordinaten irgend einer durch ihre Schnittgerade l gehenden Ebene $E(uvw)$ mittels der Formeln bestimmt:

$$u = \frac{u_1 + \lambda u_2}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_1 + \lambda v_2}{1 + \lambda}, \quad w = \frac{w_1 + \lambda w_2}{1 + \lambda}, \tag{7}$$

die, wie man sieht, ganz den Formeln 6), § 2 für alle Punkte entsprechen, welche in der Verbindungslinie zweier gegebener Punkte liegen. (Vgl. auch I, § 10.)

Bemerkung: Das Ebenenbüschel wird durch eine beliebige, nicht durch seine Achse gehende Ebene in einem zu ihm perspektiven Strahlenbüschel geschnitten. Schneidet man dasselbe Ebenenbüschel durch eine zweite solche Ebene, so sind die beiden so entstandenen Strahlenbüschel auch aufeinander perspektivisch bezogen, da je zwei entsprechende Strahlen sich in einem Punkte der Schnittgeraden der beiden Ebenen schneiden. Man kann daher das Doppelverhältnis von irgend vier Ebenen des Büschels definieren als das Doppelverhältnis der vier zugehörigen Strahlen eines beliebigen zum Büschel perspektiven Strahlenbüschels und so diesen Fundamentalbegriff, der in der analytischen Geometrie der Ebene ausführlich erläutert worden war, sofort auf das Ebenenbüschel übertragen.

Die Elementargebilde erster Stufe. Punkt, Gerade und Ebene sind die wahren Elemente in der räumlichen Geometrie, und daher sind die geradlinige Punktreihe als stetige und „eindimensionale“ Folge von Punkten, welche in einer geraden Linie liegen, das Ebenenbüschel als stetige und eindimensionale Folge von Ebenen, welche durch eine gerade Linie gehen, und das Strahlenbüschel als stetige und eindimensionale Folge von Geraden, welche sowohl in einer Ebene liegen, als auch durch einen (in dieser Ebene gelegenen) Punkt gehen, die einfachsten, aus Elementen zusammengesetzten Gebilde. Man nennt sie die drei Elementargebilde erster Stufe; deswegen erster, weil jedes Element durch eine einzige Angabe (bei der Punktreihe Abstand von einem beliebig herausgegriffenen Punkt, bei Ebenenbüschel Winkel

mit einer beliebig herausgegriffenen Ebene, bei Strahlenbüschel Winkel mit einem beliebig herausgegriffenen Strahl) bestimmt ist. Auch ist (nach I, § 3) sofort klar, daß man irgend zwei solche Gebilde, ob sie von derselben Art sind oder nicht, so projektivisch aufeinander beziehen kann, daß irgend drei Elementen des einen irgend drei Elemente des anderen entsprechen.

Gegeben seien drei Ebenen E_1, E_2, E_3:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ U_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \\ U_3 &\equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 = 0. \end{aligned} \qquad 8)$$

Sie schneiden sich im allgemeinen in einem Punkte, dessen Koordinaten aus 8) durch Auflösung nach x, y, z als Ausdrücke mit demselben Nenner (in Determinantenform) gefunden werden (I, § 20). Ist dieser gleich 0, so sind x, y, z im allgemeinen unendlich, was nur möglich ist, wenn die drei Schnittlinien je zweier Ebenen parallel sind und also einen prismatischen Raum als Kanten begrenzen. In solch einem Falle muß man sich darauf beschränken, die Verhältnisse $x:y:z$ durch Berechnung der Zähler (die ja auch Determinanten sind), d. h. die Richtung festzustellen, in welcher der unendlich ferne Punkt liegt.

Wenn aber auch noch diese drei Zähler gleich 0 sind, so werden die Koordinaten der Schnittpunkte unbestimmt. Die drei Gleichungen 8) stehen in einer Abhängigkeit voneinander und jede ist eine Folge der beiden anderen. Es existiert dann also eine Identität:

$$U_3 \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2,$$

d. h. E_3 gehört dem durch E_1 und E_2 bestimmten Ebenenbüschel an, und die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Nach Ausschluß dieses Falles stellt auch jede durch lineare Verbindung der drei Gleichungen 8) hergestellte Gleichung:

$$U \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \qquad \mathbf{9)}$$

eine durch den Durchschnittspunkt gehende Ebene E vor, und zwar, wenn $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ beliebig variiert wird, jede solche Ebene.

Denn zunächst geht E sicherlich durch den Schnittpunkt, da für diesen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, also auch $U = 0$, was man auch für λ_1, λ_2, λ_3 setzen mag. Und umgekehrt kann die Gleichung jeder durch ihn gehenden Ebene nach passender Wahl von $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ in die Form 9) gebracht werden, da man zwei Parameter, etwa $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, zur Verfügung hat und daher die Bedingung stellen darf, daß die durch 9) gegebene Ebene noch durch irgend zwei andere Punkte im Raume gehe, welche mit dem Schnittpunkt zusammen irgend eine durch den letzteren gehende Ebene bestimmen. Daher:

Sind U_1, U_2, U_3 irgend drei voneinander unabhängige lineare Ausdrücke, so stellt die Gleichung:

$$U \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0 \tag{9}$$

ein Ebenenbündel, d. h. die Gesamtheit aller Ebenen vor, welche durch einen und denselben Punkt gehen.

Werden U_1, U_2, U_3 in der Form 10), § 7 vorausgesetzt und soll U dieselbe Form erhalten, so ist noch durch $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ zu dividieren. Also:

Die drei Ausdrücke:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ v &= \frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}, \\ w &= \frac{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \end{aligned} \tag{10}$$

sind, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ beliebig angenommen werden, die Koordinaten irgend einer Ebene des durch die drei Ebenen:

$$E_1(u_1, v_1, w_1), \quad E_2(u_2, v_2, w_2), \quad E_2(u_3, v_3, w_3)$$

bestimmten Ebenenbündels. [Vgl. 10), § 2.]

Ein Punkt im Raum bestimmt nicht allein ein Ebenenbündel, sondern auch ein Strahlenbündel, d. h. die Gesamtheit aller durch ihn gehenden Geraden. Beide zusammen nennt man auch kurz das zu diesem Punkt als Zentrum zugehörige Bündel. Es ist ein Elementargebilde zweiter Stufe, genau so wie das ebene System, als der Inbegriff aller in einer Ebene liegenden Punkte und geraden Linien.

Selbstverständlich kann die Theorie der kollinearen und reziproken Verwandtschaft auch auf Bündel übertragen werden (I, § 26). Insbesondere ist zu erwähnen erstens die perspektivische Lage eines Bündels zu einem ebenen System, in welcher jeder Punkt des letzteren auf dem zugeordneten Strahl des ersteren liegt, und zweitens die polare Beziehung eines Bündels auf sich selbst. Unter dieser ist wieder die der Anschauung am unmittelbarsten zugängliche und seit alters her erkannte Polarität hervorzuheben — von der auch diese Art Verwandtschaft den Namen entlehnt hat —, welche in der Zuordnung jeder Ebene zu dem auf ihr im Zentrum des Bündels errichteten Lot besteht. Schneidet man dann das Bündel durch eine Kugel um das Zentrum als Mittelpunkt, so wird die Ebene in einem größten Kreis und die Gerade in zwei gegenüberliegenden Punkten, den Polen dieses Kreises geschnitten (z. B. auf der Erdkugel Äquator und Nord- und Südpol).

Es seien vier Ebenen: E_1, E_2, E_3, E_4 durch ihre Gleichungen gegeben:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0.$$

Sie werden im allgemeinen ein Tetraeder einschließen, es sei denn, daß sie sich in einem Punkte schneiden. Die Bedingung für diesen Ausnahmefall kann man durch Berechnung des Schnittpunktes dreier Ebenen und Einsetzen in die Gleichung der vierten Ebene auffinden. Sie wird nach I, § 20 durch das Nullsetzen der Determinante aus den 16 Koeffizienten gebildet. In diesem Falle muß auch eine Identität von der Form:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 \equiv 0$$

nachweisbar sein, da dieselbe aussagt, daß E_4 zu dem durch E_1, E_2 und E_3 bestimmten Ebenenbündel gehört.

Im allgemeinen aber wird es eine solche Identität nicht geben. Dann kann jeder irgendwie gegebene lineare Ausdruck auf die Form:

$$U \equiv \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4$$

gebracht werden, weil nun genügend viele und voneinander unabhängige Gleichungen zur Bestimmung der λ vorhanden sind. Daher auch:

Man kann die Gleichung jeder Ebene im Raume durch lineare Verbindung der vier Gleichungen von

irgend vier nicht in einem Punkt zusammentreffenden Ebenen herstellen.

Und daraus endlich:

Zwischen den linken Seiten der Gleichungen von fünf beliebigen Ebenen im Raum ist immer eine Identität von der Form vorhanden:

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 + \lambda_4 U_4 + \lambda_5 U_5 = 0. \qquad \textbf{11)}$$

Aus den Entwickelungen der letzten beiden Paragraphen geht klar hervor, daß sich im Raume Ebene und Punkt reziprok gegenüberstehen, genau wie im ebenen System Punkt und Gerade und im Bündel Ebene und Gerade. Den analytischen Ausdruck für diese Dualität hat man in der Festsetzung der drei Koordinaten u, v, w der Ebene anzusehen, die auch sofort bezeugt, daß die Gesamtheit aller Ebenen im Raume dreifach unendlich ist, wie die Gesamtheit aller Punkte.

Eigenartig verhält sich bei dieser Reziprozität die gerade Linie, insofern ihr wieder die gerade Linie reziprok gegenübersteht, aber der geraden Linie als Träger einer Punktreihe die gerade Linie als Achse eines Ebenenbüschels und umgekehrt. Auch bei der Zusammenstellung der Elemente zu Elementargebilden zeigt die Gerade einen besonderen Charakter. Denn während zwei Ebenen immer ein Ebenenbüschel und zwei Punkte immer eine geradlinige Punktreihe bestimmen, ist die Sachlage bei zwei Geraden eine ganz andere. Solange sie zueinander beliebig, d. h. im allgemeinen windschief gelegen sind, und man also nicht voraussetzen darf, daß sie sich in einem Punkte schneiden oder, was dasselbe ist, daß sie in ein und derselben Ebene liegen, solange lassen sie sich nicht zu einem Strahlenbüschel verknüpfen, sondern bleiben ohne jede Verbindung und gesondert.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben die Ebenen:

$$E_0\colon\ 4x + 3y - 5z + 16 = 0, \quad E_1\colon\ -3x + 2y + 4z - 7 = 0.$$
$$E_2\colon\ x + 4y - 2z + 5 = 0.$$

Die Gleichungen der drei Ebenen zu ermitteln, von denen jede durch die Schnittgerade zweier der drei Ebenen E_0, E_1, E_2 geht und auf der dritten senkrecht steht. Nachzuweisen, daß sie sich in einer Geraden schneiden.

2. (Gegeben E_0, E_1, E_2 wie in 1). Außerdem:

$$E_3\colon x + y + z - 5 = 0, \quad E_4\colon -2x + 5y - 3z + 7 = 0.$$

Gesucht die Gleichungen derjenigen (10) Ebenen, welche durch den Durchschnittspunkt dreier, z. B. $E_0 E_1 E_2$ und durch die Schnittlinie von E_3 und E_4 gehen.

3. Gegeben irgend vier lineare Ausdrücke:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \quad U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,$$
$$U_3 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \quad U_4 \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4.$$

Man bilde aus ihnen noch die acht Kombinationen:

$$2\,V_1 \equiv -U_1 + U_2 + U_3 + U_4, \quad 2\,V_2 \equiv U_1 - U_2 + U_3 + U_4,$$
$$2\,V_3 \equiv U_1 + U_2 - U_3 + U_4, \quad 2\,V_4 \equiv U_1 + U_2 + U_3 - U_4,$$
$$2\,W_1 \equiv U_1 + U_2 + U_3 + U_4, \quad 2\,W_2 \equiv U_1 + U_2 - U_3 - U_4,$$
$$2\,W_3 \equiv U_1 - U_2 + U_3 - U_4, \quad 2\,W_4 \equiv U_1 - U_2 - U_3 + U_4$$

und stelle die 12 Ebenen in drei Gruppen zusammen:

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = 0, \quad U_4 = 0,$$
$$V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad V_3 = 0, \quad V_4 = 0.$$
$$W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \quad W_3 = 0, \quad W_4 = 0.$$

Dann geht durch die Schnittlinie einer beliebigen Ebene $U = 0$ mit einer beliebigen Ebene $V = 0$ auch eine Ebene $W = 0$. Solcher Schnittgeraden gibt es 16. Sie schneiden sich in 12 Punkten, die zu ermitteln sind. Letztere zerfallen auch in drei Gruppen zu je vier*). Zum Schluß beweise man die Identität:

$$V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4 - U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \cdot U_4 \equiv 0.$$

§ 9.

Die analytische Behandlung der Geraden. Ihre vier Koordinaten. Gerade und Punkt. Gerade und Ebene. Zwei Gerade. Ihr kürzester Abstand.

Der geraden Linie als einem selbständigen Raumelement kommt eine eingehende analytische Darstellung zu, deren Grundzüge allerdings schon in früheren Paragraphen enthalten sind. Es ist angemessen, sie hier zusammenzustellen.

1. Wenn zwei Punkte $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$, $P_1(x_1\, y_1\, z_1)$ der Geraden l gegeben sind, so liefern die Formeln:

$$x = \frac{x_0 - \lambda x_1}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_0 - \lambda y_1}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_0 - \lambda z_1}{1 - \lambda}$$

oder:

$$x = x_0 + \mu(x_1 - x_0), \quad y = y_0 + \mu(y_1 - y_0), \quad z = z_0 + \mu(z_1 - z_0)$$

jeden Punkt von l. [Siehe § 2, 6) und 7), S. 22.]

*) Diese Konfiguration von 12 Ebenen, 12 Punkten und 16 Geraden heißt eine Figur von Reye.

2. Die Formeln:

$$x = x_0 + r\cos\alpha, \quad y = y_0 + r\cos\beta, \quad z = z_0 + r\cos\gamma$$

sind die gegebene Parameterdarstellung für den Fall, daß ein Punkt $P_0(x_0 y_0 z_0)$ und eine ihrer beiden entgegengesetzten Richtungen bekannt sind. Hier bedeutet r den Abstand von P_0 mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem der betreffende Punkt von P_0 aus in der Richtung $\alpha\beta\gamma$ oder in der entgegengesetzten liegt. [Siehe § 2, 9), S. 22.]

3. Die Formeln:

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda}, \quad w = \frac{w_0 + \lambda w_1}{1 + \lambda}$$

oder auch:

$$u = u_0 + \mu \cdot (u_1 - u_0), \; v = v_0 + \mu \cdot (v_1 - v_0), \; w = w_0 + \mu \cdot (w_1 - w_0)$$

ergeben jede durch die Gerade gehende Ebene $E\,(u\,v\,w)$, wenn zwei solche $E_0(u_0 v_0 w_0)$ und $E_1(u_1 v_1 w_1)$ bekannt sind. (Siehe § 8, S. 84.)

4. Am bequemsten ist in der Regel die Darstellung der Geraden durch zwei ihrer drei Projektionen, etwa auf die xy- und xz-Ebene. In expliziter Form erhält man so:

$$\begin{aligned} y &= ax + b, \\ z &= cx + d. \end{aligned} \tag{1}$$

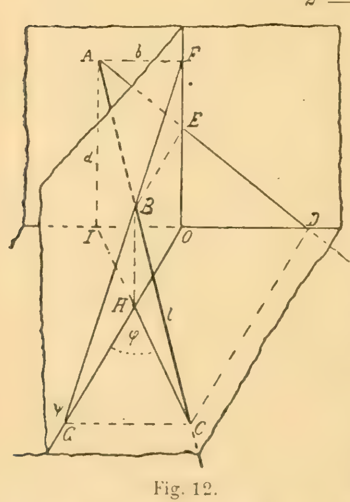


Fig. 12.

Die erste Gleichung gibt die Projektion IHC, die zweite GBF (Fig. 12). Die vier Koeffizienten a, b, c, d haben (nach I, § 9) sehr einfache Bedeutung. Denn b ist das Stück OI, welches die erste Projektion auf der y-Achse (in Fig. 12 negativ), d das Stück OF, welches die zweite Projektion auf der z-Achse abschneidet. Ferner ist:

$$a = \operatorname{tg}\varphi, \quad c = \operatorname{tg}\psi.$$

(Richtungskoeffizienten der Projektionen mit $+\,x$-Achse als Anfangsrichtung.)

Man sieht also, daß erstens die Koeffizienten a, b, c, d durchaus unabhängig voneinander sind, daß zweitens jeder von

ihnen jeden beliebigen Wert haben kann und daß drittens ihnen ganz bestimmte einfache geometrische Bedeutungen zukommen. Die Gerade ist durch ihre Angabe vollständig festgelegt und deswegen nennt man auch:

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \tag{2}$$

die vier Koordinaten der Geraden l.

Bemerkung: Die Punkte im Raum bilden eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit und die Ebenen gleichfalls. Die Geraden im Raume bilden eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit, denn eine jede hat vier voneinander unabhängige Koordinaten. Dies ist für die Theorie der Geraden von der höchsten Bedeutung und rechtfertigt vom analytischen Standpunkt ihre zum Schluß des vorigen Paragraphen erwähnte Eigenart gegenüber den anderen Raumelementen, Punkt und Ebene.

Kommt die dritte Projektion DEA in Frage, so eliminiere man aus 1) die Koordinate x. Es folgt:

$$cy - az - (bc - ad) = 0. \tag{1a}$$

Es ist zuweilen sehr nützlich, sie zu den Gleichungen 1) hinzuzufügen, trotzdem sie nur eine Folge von ihnen ist. Auch pflegt man die neue Konstante $(bc - ad)$ als fünfte Koordinate e

$$e = bc - ad \tag{2a}$$

zu den vier Koordinaten a, b, c, d hinzuzunehmen, um eben auch der dritten Projektion gerecht zu werden.

Als vierte besondere Ebene durch l verdient noch die durch O Erwähnung, welche nach Einführung von e die Gleichung erhält:

$$ex + dy - bz = 0. \tag{1b}$$

Aufgabe I. Gegeben auf l zwei Punkte $P_0(x_0 y_0 z_0)$, $P_1(x_1 y_1 z_1)$. Gesucht die Koordinaten a, b, c, d (und e) von l.

Lösung: Man setze erst P_0, dann P_1 in 1) ein und ermittele darauf a, b, c, d. Es folgt:

$$\begin{gathered} a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad c = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}, \quad b = \frac{x_1 y_0 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}, \\ d = \frac{x_1 z_0 - z_1 x_0}{x_1 - x_0} \left(e = bc - ad = \frac{z_1 y_0 - y_1 z_0}{x_1 - x_0} \right) \end{gathered} \tag{3}$$

[Der aus a, b, c, d abgeleitete Wert für e hatte zunächst den Nenner $(x_1 - x_0)^2$ und bedurfte noch einer Umformung des Zählers.] Die Koordinaten werden nach 3) unendlich, wenn $x_1 = x_0$, d. h. wenn l auf der x-Achse senkrecht. Man muß dann mit den Achsen tauschen. Die Formeln 3) ermöglichen sofort die Feststellung der Richtungswinkel von l durch die Koordinaten. Denn es ist nach 11a), § 1:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x_1 - x_0 : y_1 - y_0 : z_1 - z_0 = 1 : a : c. \quad \mathbf{3a)}$$

Aufgabe II. Gegeben zwei durch l gehende Ebenen $E_0(u_0 v_0 w_0)$, $E_1(u_1 v_1 w_1)$. Gesucht die vier Koordinaten a, b, c, d von l.

Lösung: Die Gleichungen von E_0 und E_1 sind nach 10), § 7:

$$u_0 x + v_0 y + w_0 z + 1 = 0; \quad u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0$$

und aus ihnen müssen die Gleichungen 1) durch Auflösung nach y und z entstehen. So ergibt sich:

$$a = -\frac{u_0 w_1 - w_0 u_1}{v_0 w_1 - w_0 v_1}, \quad b = -\frac{w_1 - w_0}{v_0 w_1 - w_0 v_1},$$

$$c = +\frac{u_0 v_1 - v_0 u_1}{v_0 w_1 - w_0 v_1}, \quad d = +\frac{v_1 - v_0}{v_0 w_1 - w_0 v_1}, \qquad 4)$$

$$\left(e = \frac{u_1 - u_0}{v_0 w_1 - w_0 v_1}\right).$$

Aufgabe III. Gegeben $l(a, b, c, d)$. Zu berechnen ihre drei „Spuren", d. h. die Schnittpunkte A, B, C mit den Koordinatenebenen.

Lösung: Man setze in 1) nacheinander $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und erhält:

$$A(0, +b, +d), \quad B\left(-\frac{b}{a}, 0, -\frac{e}{a}\right), \quad C\left(-\frac{d}{c}, +\frac{e}{c}, 0\right).$$

Aufgabe IV. Gegeben $l(a, b, c, d)$ und ein beliebiger Punkt $Q(x_0 y_0 z_0)$ im Raum. Gesucht 1. Gleichung oder Koordinaten der Ebene E durch l und Q, 2. Gleichung der Ebene durch Q senkrecht auf l, 3. Abstand $\varDelta$ zwischen Q und l. 4. Richtungswinkel von $\varDelta$.

Lösung: 1. Da E durch l gehen soll, muß ihre Gleichung eine lineare Verbindung der beiden Gleichungen 1), also von der Form sein:

$$(y - ax - b) + \lambda(z - cx - d) = 0.$$

Sie soll aber auch durch Q gehen. Man setze seine Koordinaten ein und bestimme so λ. Die Gleichung von E wird darauf:

$$(y - ax - b)(z_0 - cx_0 - d) - (y_0 - ax_0 - b)(z - cx - d) = 0 \quad 5)$$

oder nach Auflösung der Klammern und Einführung von e:

$$x(-az_0 + cy_0 - e) + y(z_0 - cx_0 - d) + z(-y_0 + ax_0 + b) + (ex_0 + dy_0 - bz_0) = 0. \quad 5a)$$

Man beachte, wie in 5a) alle vier in 1), 1a) und 1b) enthaltenen linearen Ausdrücke als Koeffizienten vorkommen, nachdem in ihnen der Punkt $Q(x_0, y_0, z_0)$ eingesetzt worden ist. Sie werden $= 0$, wenn Q auf l liegt, wie es sein muß, da dann E unbestimmt wird.

2. Die Gleichung einer Ebene, welche auf l, deren Richtungskosinus nach 3a) bestimmt werden, senkrecht steht, hat nach der Formel 6a), § 7 die Gestalt:

$$x + ay + cz + k = 0.$$

Soll die Ebene außerdem durch Q gehen, so ermittele man k durch Einsetzen. Man erhält die Endgleichung:

$$(x - x_0) + a(y - y_0) + b(z - z_0) = 0. \quad 6)$$

3. Für den Abstand Δ eines beliebigen Punktes $Q(x_0 y_0 z_0)$ von einer beliebigen Geraden l ist bereits in 21), § 1 eine Formel gefunden worden, welche nach entsprechender Veränderung der Bezeichnungen sofort verwendbar ist, um die Koordinaten a, b, c, d (und e) einzuführen. Es seien also zunächst $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel von l und xyz die Koordinaten irgend eines Punktes auf l, so folgt nach 21), § 1:

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

wo A, B, C die drei Ausdrücke:

$$A = (y_0 - y)\cos\gamma - (z_0 - z)\cos\beta,$$
$$B = (z_0 - z)\cos\alpha - (x_0 - x)\cos\gamma,$$
$$C = (x_0 - x)\cos\beta - (y_0 - y)\cos\alpha.$$

$\alpha\beta\gamma$ werden nach 3a) bestimmt. Darauf erhält man:

$$\sqrt{(1 + a^2 + c^2)}\,A = (y_0 - y)c - (z_0 - z)a = y_0 c - z_0 a - yc + za$$

oder nach 1a):

$$A = \frac{y_0 c - z_0 a - e}{\sqrt{1 + a^2 + c^2}}.$$

In derselben Weise sind B und C umzuformen.

Dann entsteht die gesuchte Formel:

$$\varDelta = \frac{\sqrt{(y_0 c - z_0 a - e)^2 + (z_0 - c x_0 - d)^2 + (y_0 - a x_0 - b)^2}}{\sqrt{1 + a^2 + c^2}}. \tag{7)}$$

4. Es seien λ, μ, ν die Richtungswinkel von $\varDelta$. Da $\varDelta$ auf l senkrecht steht, so gibt die Gleichung 15), § 1 nach 3a) zunächst die eine Bedingung:

$$\cos\lambda + a\cos\mu + c\cos\nu = 0.$$

Dann liegt aber $\varDelta$ in der Ebene durch l und Q, mit der Gleichung 5a). Da die Richtungskosinus dieser Ebene nach 6), § 7 gefunden werden, so gibt dieselbe Formel nach 15), § 1 die weitere Bedingung:

$$\cos\lambda(-az_0 + cy_0 - e) + \cos\mu(z_0 - cx_0 - d) \\ + \cos\nu(-y_0 + ax_0 + b) = 0$$

und aus beiden folgt nun $\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$ ohne Schwierigkeit.

Bemerkungen a), b), c) zu Aufgabe IV. a) Nach 1) und 1a) erhält $\varDelta$, wenn Q auf l liegt, den Wert 0, wie es sein muß. b) $\varDelta$ erscheint hier als Quadratwurzel aus einer Summe der Quadrate von drei in bezug auf x_0, y_0, z_0 linearen Ausdrücken. Diese Summe kann aber auf zwei Quadrate reduziert werden, da A, B, C nicht unabhängig sind, sondern der Identität:

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0 \quad \text{oder} \quad A + Ba + Cc = 0$$

genügen. Eliminiert man hieraus etwa A, so wird:

$$\varDelta = \sqrt{B^2(1 + a^2) + C^2(1 + c^2) + 2BCac}, \tag{7a)}$$

und $\varDelta$ kann also, nachdem das Produktglied durch eine lineare Transformation fortgeschafft, in der Tat als Quadratwurzel aus einer Summe von zwei Quadraten dargestellt werden. Diese Tatsache leuchtet auch ein, wenn durch l zwei zueinander senkrechte Ebenen angenommen und die Lote p und q von Q auf sie nach 7a), § 7 bestimmt werden. Es wird dann sofort:

$$\varDelta = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

c) Ein anderer Weg zur Formel 7) für $\varDelta$ geht über die Berechnung des Fußpunktes von $\varDelta$ mit nachfolgender Anwendung von 10), § 1:

$$\varDelta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Er ist aber weit umständlicher und daher hier nicht beschritten worden.

Aufgabe V. Gegeben eine Gerade $l(a, b, c, d)$ und eine Ebene $E(u, v, w)$. Zu ermitteln 1. den Schnittpunkt von l und E. 2. den Winkel δ zwischen l und E. 3. Gleichung der Ebene durch l senkrecht auf E.

Lösung: 1. Der Schnittpunkt wird nach Zusammenstellen von 1) und der Gleichung von E:

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

durch Berechnung von xyz gefunden. 2. Der Winkel δ ist das Komplement des Winkels zwischen l und dem Lot auf E, deren Richtungswinkel nach 3a) und 6a), § 7 zu bestimmen sind. Formel 13), § 1 gibt daher sofort:

$$\sin\delta = \frac{u + av + cw}{\sqrt{1 + a^2 + c^2} \cdot \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}. \qquad 8)$$

3. Da die Ebene durch l gehen soll, ist ihre Gleichung von der Form:

$$(y - ax - b) + \lambda(z - cx - d) = 0$$

oder:

$$x(-a - c\lambda) + y + \lambda z + (-b - d\lambda) = 0.$$

Sie soll auf E senkrecht stehen. Die Formel 2a), § 8 gibt daher sofort:

$$-u(a + c\lambda) + v + \lambda w = 0.$$

Hieraus folgt λ.

Aufgabe VI. Gegeben zwei Gerade $l(a, b, c, d)$, $l_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$. Gesucht 1. der Winkel φ, welchen sie bilden. 2. Die Bedingung, daß sie sich schneiden. 3. Im allgemeinsten Falle der kürzeste Abstand Δ zwischen ihnen.

Lösung: 1. Die Richtungen der Geraden ergeben sich nach 3a). Daher nach 13), § 1 sofort:

$$\cos\varphi = \frac{1 + aa_1 + cc_1}{\sqrt{1 + a^2 + c^2} \cdot \sqrt{1 + a_1^2 + c_1^2}}. \qquad 9)$$

Im besonderen also:

Zwei Gerade stehen senkrecht aufeinander, wenn

$$aa_1 + cc_1 = -1.$$

2. Die beiden Gleichungen von l sind:

$$\alpha)\ y = ax + b, \qquad \beta)\ z = cx + d.$$

Die von l_1:

$$\alpha_1)\ y = a_1x + b_1, \quad \beta_1)\ z = c_1x + d_1.$$

Wenn sich l und l_1 schneiden sollen, so müssen die vier Ebenen $\alpha)$, $\beta)$, $\alpha_1)$, $\beta_1)$ durch den Schnittpunkt gehen. Die Bedingung hierfür entsteht daher durch Elimination von x, y, z. Aus $\alpha)$ und $\alpha_1)$ einerseits und aus $\beta)$ und $\beta_1)$ andererseits folgt aber:

$$x = -\frac{b - b_1}{a - a_1}; \quad x = -\frac{d - d_1}{c - c_1}.$$

Die gesuchte Bedingung ist also:

$$\frac{b - b_1}{a - a_1} = \frac{d - d_1}{c - c_1}. \tag{10}$$

Schafft man die Nenner fort und führt außerdem die fünften Koordinaten e und e_1 ein, so verwandelt sie sich in:

$$e + e_1 + a d_1 + d a_1 - b c_1 - c b_1 = 0. \tag{10a}$$

3. Es gibt stets eine Ebene E durch l parallel zu l_1 und eine Ebene E_1 durch l_1 parallel zu l. Ihre Gleichungen sind von der Form:

$$(y - ax - b) + \lambda(z - cx - d) = 0$$

und

$$(y - a_1 x - b_1) + \lambda_1(z - c_1 x - d_1) = 0.$$

Sie sollen parallel sein. Die Koeffizienten von xyz müssen daher in beiden Gleichungen dasselbe Verhältnis zueinander haben. Daher:

$$-a - \lambda c : 1 : \lambda = -a_1 - \lambda_1 c_1 : 1 : \lambda_1,$$

also:

$$\lambda = \lambda_1 = -\frac{a - a_1}{c - c_1}.$$

Die Gleichungen von E und E_1 werden hiernach:

$$x(-a c_1 + c a_1) + y(c_1 - c) + z(a - a_1) + [e - b c_1 + d a_1] = 0,$$
$$x(-a c_1 + c a_1) + y(c_1 - c) + z(a - a_1) + [-e_1 - b_1 c - d_1 a] = 0.$$

Der kürzeste Abstand $\varDelta$ zwischen l und l_1 ist zugleich der Abstand der beiden Parallelebenen E und E_1. Letzterer aber ist gleich der (algebraischen) Differenz der beiden Lote von einem beliebigen Punkte P im Raume auf sie und diese wieder sind nach Formel 7a), § 7 zu berechnen. Daher:

$$\varDelta = \frac{e + e_1 + a d_1 + d a_1 - b c_1 - c b_1}{\sqrt{(a c_1 - c a_1)^2 + (a - a_1)^2 + (c - c_1)^2}}. \tag{11}$$

Für $\varDelta = 0$ folgt übrigens, wie man sieht, noch einmal die Bedingung 10a), daß l und l_1 sich schneiden.

Auch der folgende Weg führt zur Formel 11). Es seien $P(xyz)$ und $P(x_1y_1z_1)$ die Fußpunkte des gemeinsamen Lotes auf l und l_1. Also zunächst:

$$y = ax + b,\ z = cx + d;\ y_1 = a_1x_1 + b_1;\ z_1 = c_1x_1 + d_1. \tag{12}$$

Da PP_1 auf l und l_1 senkrecht steht, so:

$$\begin{aligned}(x - x_1) + (y - y_1)\,a + (z - z_1)\,c &= 0,\\ (x - x_1) + (y - y_1)\,a_1 + (z - z_1)\,c_1 &= 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man hier für y, y_1, z, z_1 ihre Ausdrücke 12) durch x und x_1 ein, so entstehen zwei Gleichungen ersten Grades mit x und x_1 als Unbekannten, aus denen diese zu berechnen sind. Das Einsetzen ihrer Werte in y, y_1, z, z_1 kann man sich aber ersparen, da aus den beiden letzten Gleichungen $y - y_1$ und $z - z_1$ durch $x - x_1$ ausgedrückt werden können, worauf die Formel:

$$\varDelta = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

das Lot als Produkt von $(x - x_1)$ mit einem von a, a_1, c, c_1 abhängenden Faktor darstellt. Diese Methode ist etwas mühsamer, liefert dafür aber nicht bloß die Länge von $\varDelta$, sondern auch die Koordinaten der Fußpunkte von $\varDelta$. Will man letztere umgehen, so bilde man aus 12) die Kombination:

$$\begin{aligned}(x - x_1)(ac_1 - ca_1) + (y - y_1)(c - c_1) + (z - z_1)(a_1 - a)\\ - c - c_1 - ad_1 - da_1 + bc_1 + cb_1 = 0\end{aligned} \tag{14}$$

und berechne aus 14) und 13):

$$x - x_1,\quad y - y_1,\quad z - z_1.$$

Bemerkung. Irgend zwei Punkte P_1 und P_2 im Raume haben stets einen Mittelpunkt M und wechseln ihre Lage durch eine halbe Umdrehung um M oder besser um eine durch M gehende, zu P_1P_2 senkrechte Gerade. Irgend zwei Ebenen E_1 und E_2 im Raume haben zwei aufeinander senkrechte Winkelhalbierungsebenen, zu deren jeder sie symmetrisch liegen. Sie vertauschen ihre Lage nach einer halben Umdrehung um eine in einer dieser Mittelebenen gelegene zur Schnittlinie senkrechte Achse, wenn sie dabei mit der Achse starr verbunden bleiben*). Irgend zwei (windschiefe) Gerade l_1 und l_2 haben eine Mittelebene, nämlich diejenige Ebene,

*) Nur wenn $E_1 \perp E_2$, genügt hierzu auch eine Viertelumdrehung um die Schnittlinie.

welche zu l_1 und l_2 parallel ist und mitten zwischen den beiden parallelen Ebenen liegt, von denen die eine durch l_1, die andere durch l_2 geht. Sie geht durch die Mitte M des kürzesten Abstandes. Zieht man durch M die Parallelen zu l_1 und l_2, so kann man in gewissem Sinne die beiden Winkelhalbierenden dieser Parallelen als zwei Symmetrieachsen von l_1 und l_2 einführen. Die dritte wäre der nach beiden Seiten unbegrenzt verlängerte kürzeste Abstand. Durch eine halbe Umdrehung um eine der beiden erstgenannten Symmetrieachsen vertauschen l_1 und l_2 ihre Lage im Raume. Also:

Im Raume kann man durch Verschieben und Drehen eines starren Systems (durch Kongruenz) stets bewirken, daß irgend zwei Punkte P_1 und P_2 oder irgend zwei Ebenen E_1 und E_2 oder irgend zwei Gerade l_1 und l_2 ihre Lage zueinander vertauschen*).

Hieraus folgt: Wenn zwei Punktpaare (PP_1) und $(P'P'_1)$ die Eigenschaft haben, daß man durch Kongruenz P mit P' und P_1 mit P'_1 zur Deckung bringen kann, so kann man durch Kongruenz auch P mit P'_1 und P_1 mit P' zur Deckung bringen. Ein Gleiches gilt für zwei Ebenenpaare und für zwei Linienpaare.

Für zwei Punktpaare genügt offenbar, daß der Abstand in einem Paar gleich dem Abstand im anderen sei. Für zwei Ebenenpaare ist der Abstand durch den (oder vielmehr die) Winkel zwischen den Ebenen eines Paares zu ersetzen. Für zwei Linienpaare aber muß sowohl der Winkel φ als auch der kürzeste Abstand Δ für das eine Paar denselben Wert haben wie für das andere Paar, da φ und Δ durch keine Kongruenz geändert werden können. Aber selbst dann kann es unmöglich sein, zwei solche Paare zur Deckung zu bringen, weil dazu noch gehört, daß beide Paare „linksgängig“ oder beide „rechtsgängig“ seien**).

Um zu erklären, was hiermit gemeint ist, stelle man sich ein Linienpaar (l, l_1) vor, beschreibe um l als Achse mit dem kürzesten Abstand Δ als Radius den Zylinder, der also l_1 im Fußpunkt des kürzesten Abstandes berührt und wickele nun

*) In der Ebene gilt der Satz nicht. Man kann durch Verschieben und Drehen in der Ebene irgend zwei Gerade l und l_1 nur ihre Lage vertauschen lassen, wenn sie senkrecht aufeinanderstehen, oder parallel sind.

**) Wenn aber zwei Gerade sich schneiden, oder parallel sind, oder auch senkrecht aufeinanderstehen (ohne sich zu schneiden), kann dieser Begriff nicht angewendet werden.

l_1 durch Rollen der Berührungsebene auf den Zylinder ab. Dann wird aus l_1 eine Schraubenlinie (§ 6) und wenn diese linksgängig — rechtsgängig — ist, soll auch l_1 zu l und, was nach dem Vorangegangenen dasselbe ist, l zu l_1 linksgängig — rechtsgängig — heißen*).

Aufgabe VIII. Gegeben $l(a, b, c, d)$. Es ist zu ermitteln, wann sie zur x- oder y- oder z-Achse links-, wann rechtsgängig ist.

Lösung: Es seien $P_0(x_0 y_0 z_0)$, $P_1(x_1 y_1 z_1)$ zwei Punkte auf l. Dann ist $y_0 z_1 - z_0 y_1$ gleich dem doppelten Inhalt der Projektion des Dreieckes OP_0P_1 auf die yz-Ebene mit dem Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem sein Umlaufssinn von der $+x$-Achse aus betrachtet positiv oder negativ ist. Ferner ist $x_1 - x_0$ der Höhenunterschied auf der zugehörigen Schraube um die x-Achse. Daher ist l zur x-Achse links- oder rechtsgängig, je nachdem die beiden Ausdrücke:

$$y_0 z_1 - z_0 y_1 \quad \text{und} \quad x_1 - x_0$$

entgegengesetzte oder gleiche Zeichen haben. Also nach 3), je nachdem $e = bc - ad$ negativ oder positiv ist. In gleicher Weise findet man für die y-Achse links- oder rechtsgängig, je nachdem ad negativ oder positiv und für die z-Achse, je nachdem bc positiv oder negativ ist.

Aufgabe IX. Gegeben zwei Gerade $l(a, b, c, d)$, $l_1(a_1, b_1, c_1, d_1)$. Zu ermitteln, wann sie zueinander linksgängig, wann rechtsgängig sind.

Lösung (skizziert): Es sei $\alpha\beta\gamma$ eine der beiden entgegengesetzten Richtungen von l, xyz ein Punkt P auf l, desgleichen $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $x_1 y_1 z_1$ für l_1. Dann ist für den Winkel φ zwischen den Richtungen:

a) $\cos\varphi = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$.

Es sei $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ die Lotrichtung, und zwar so, daß die Drehung der ersten zur zweiten Richtung um den konkaven Winkel φ im entgegengesetzten Sinne zur Uhr erscheint, so daß nach 20), § 1:

b) $$\cos\alpha_2 = \frac{\cos\beta\cos\gamma_1 - \cos\gamma\cos\beta_1}{+\sin\varphi} \text{ usw.}$$

Die Projektion von PP_1 auf die Lotrichtung ist gleich

c) $(x_1 - x)\cos\alpha_2 + (y_1 - y)\cos\beta_2 + (z_1 - z)\cos\gamma_2$.

*) S. 116, Fig. 14 z. B. sind Achse und Strahl zueinander rechtsgängig.

Andererseits ist sie gleich $\pm \Delta$, wenn Δ der kürzeste Abstand von l und l_1. Sie ist positiv, wenn PP_1 mit $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ einen spitzen, negativ, wenn einen stumpfen Winkel ϑ bildet. Nun ist die Lage linksgängig, wenn φ und ϑ beide spitz oder beide stumpf, rechtsgängig, wenn der eine spitz, der andere stumpf. Setzt man daher b) in c) ein und berücksichtigt die Formeln 3a), so folgt zunächst:

links- oder rechtsgängig, je nachdem:

$$1 + aa_1 + cc_1 \quad \text{und}$$
$$(x_1 - x)(ac_1 - ca_1) + (y_1 - y)(c - c_1) + (z_1 - z)(a_1 - a),$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen; oder endlich nach Benutzung von 1) und 1a), oder auch 14):

links- oder rechtsgängig, je nachdem:

$$1 + aa_1 + cc_1 \quad \text{und} \quad e + e_1 + ad_1 + da_1 - bc_1 - cb_1 \qquad 15)$$

ungleiche oder gleiche Vorzeichen.

Läßt man zur Kontrolle l_1 mit der x-Achse zusammenfallen, so wird $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ und man kommt auf das Kriterium von Aufgabe VIII zurück.

Aufgabe X. Gegeben zwei Gerade: $l_1(a_1b_1c_1d_1)$, $l_2(a_2b_2c_2d_2)$, welche sich schneiden. Sie bestimmen dann ein Strahlenbüschel. Es sollen die Koordinaten einer beliebigen Geraden l dieses Strahlenbüschels gefunden werden.

Lösung: Da die beiden Geraden sich schneiden, muß zunächst nach 10a) die Bedingung:

$$e_1 + e_2 + a_1d_2 + d_1a_2 - b_1c_2 - c_1b_2 = 0$$

erfüllt sein. Es seien $\xi\eta\zeta$ der Schnittpunkt; a, b, c, d die Koordinaten von l; xyz ein Punkt P auf l, $x_1y_1z_1$ ein Punkt P_1 auf l_1 und $x_2y_2z_2$ ein Punkt P_2 auf l_2.

Dann ist nach 3):

$$a = \frac{y - \eta}{x - \xi}, \quad a_1 = \frac{y_1 - \eta}{x_1 - \xi}, \quad a_2 = \frac{y_2 - \eta}{x_2 - \xi}.$$

Man kann P, P_1, P_2 unbeschadet der Allgemeinheit auf einer geraden Linie liegend annehmen und dann nach 6), § 2 ansetzen:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \quad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda}.$$

Daher:

$$a = \frac{(y_1 - \lambda y_2) - \eta(1-\lambda)}{(x_1 - \lambda x_2) - \xi(1-\lambda)} = \frac{(y_1 - \eta) - \lambda(y_2 - \eta)}{(x_1 - \xi) - \lambda(x_2 - \xi)}$$

$$= \frac{a_1(x_1 - \xi) - \lambda a_2(x_2 - \xi)}{(x_1 - \xi) - \lambda(x_2 - \xi)}$$

oder noch einfacher:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda},$$

wenn nunmehr $-\dfrac{\lambda \cdot (x_2 - \xi)}{(x_1 - \xi)}$ durch λ ersetzt wird.

Dieselben Umformungen kann man in den Ausdrücken für b, c, d und e machen. Daher:

Wenn zwei Gerade l_1 und l_2 sich schneiden, so wird durch die Formeln:

$$a = \frac{a_1 + \lambda a_2}{1+\lambda}, \quad b = \frac{b_1 + \lambda b_2}{1+\lambda}, \quad c = \frac{c_1 + \lambda c_2}{1+\lambda},$$
$$d = \frac{d_1 + \lambda d_2}{1+\lambda}, \quad e = \frac{e_1 + \lambda e_2}{1+\lambda} \tag{16}$$

das ganze, durch l_1 und l_2 mitbestimmte Strahlenbüschel dargestellt.

Die Ausdrücke 16) sind durchaus analog zu den Ausdrücken 6), § 2 für die Koordinaten der Punkte einer Punktreihe und 7), § 8 für die Koordinaten der Ebenen eines Ebenenbüschels. Sie gelten aber hier nur bedingungsweise, nämlich nur, wenn l_1 und l_2 sich schneiden, also auch in einer Ebene liegen. In der Tat führt die Bedingung 2a), S. 91 nach Einsetzen von 16) formell zu einer quadratischen Gleichung für λ. Da aber diese Bedingung jedenfalls für l_1 und l_2 erfüllt ist, so verschwinden die Konstante und der Koeffizient von λ^2. Sie reduziert sich auf:

$$[e_1 + e_2 + (a_1 d_2 + d_1 a_2) - (b_1 c_2 + c_1 b_2)] \cdot \lambda = 0.$$

Sie hat daher nur die beiden Wurzeln $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, den Linien l_1 und l_2 entsprechend; es sei denn, daß der Faktor von λ verschwinde und die Bedingung zur Identität werde, d. h. daß l_1 und l_2 sich schneiden.

Übungsaufgaben.

1. Eine Gerade l geht durch den Punkt $P(+1, +2, -3)$ und schneidet die beiden Geraden l_1 und l_2:

$$l_1: y = 2x + 3, \quad z = -5x + 1.$$

$$l_2: y = \frac{1}{2}x - 3, \quad z = -x + 7.$$

Es sind die Koordinaten von l zu bestimmen.

2. Eine Gerade rotiert um die x-Achse. Ihre Koordinaten a, b, c, d sind als Funktionen des Drehwinkels φ zu bestimmen.

3. Welche Bedingung muß zwischen den Koordinaten a, b, c, d (und e) einer Geraden l erfüllt sein, wenn ihr Schnittpunkt mit der yz-Ebene in der Mitte zwischen den Schnittpunkten mit der zx- und der xy-Ebene liegen soll.

4. Durch eine Gerade l sind vier Ebenen gelegt worden, die erste $\perp$ auf xy-, die zweite $\perp$ auf xz-, die dritte $\perp$ auf yz-Ebene, die vierte durch den Anfangspunkt. Welche Bedingung muß zwischen ihren Koordinaten a, b, c, d (und e) erfüllt sein, damit die erste und zweite Ebene durch die dritte und vierte harmonisch getrennt sind.

§ 10.

Die sechs Plückerschen homogenen Koordinaten der geraden Linie. Linien- oder Strahlenkomplexe.

Wenn man, wie im vorigen Paragraphen, die Gerade l durch zwei ihrer Projektionen

$$y = ax + b, \qquad z = cx + d$$

bestimmt und demzufolge a, b, c, d als ihre vier „Koordinaten" einführt, so muß eine gewisse Unsymmetrie mit in Kauf genommen werden, welche der Übersichtlichkeit der erzielten Formeln Abbruch tut und außerdem den Übelstand mit sich bringt, daß ein Versagen eintritt, wenn l auf der x-Achse senkrecht steht, weil dann a, b, c, d unendlich oder unbestimmt werden, wie unmittelbar aus ihrer Deutung nach § 9 hervorgeht. Man kann dann die dritte Projektion hinzuziehen, was ja auch schon so wie so durch Einführung der „fünften" Koordinate e geschehen ist, um den Mangel an Symmetrie nicht so fühlbar zu machen. Diese Erwägungen haben den Mathematiker Plücker veranlaßt, in einem großen Werke „Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement", ein anderes, völlig

symmetrisches System von Linienkoordinaten aufzustellen, das hier um so eher erläutert werden muß, als es auf das innigste mit dem folgenschwersten Begriff der Mechanik zusammenhängt, mit dem Begriff der Kraft.

Es sei (Fig. 13) $P_0(x_0\, y_0\, z_0)$ der Angriffspunkt einer Kraft $P_0 P_1 = K$, die als Länge in der Kraftrichtung $\alpha\beta\gamma$ aufgetragen wird, so daß etwa Längeneinheit und Krafteinheit sich entsprechen. P_0 und P_1 bestimmen die Größe von K durch die Formel:

$$K = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Man pflegt K bei analytischer Behandlung der Mechanik in ihre drei Komponenten X, Y, Z nach den Achsenrichtungen zu zerlegen. Es wird:

$$\begin{aligned} X &= x_1 - x_0, \\ Y &= y_1 - y_0, \\ Z &= z_1 - z_0 \end{aligned} \qquad 1)$$

(in der Figur alle drei negativ). Daher:

$$K = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und

$$\cos\alpha = \frac{X}{K}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{K}. \qquad 2)$$

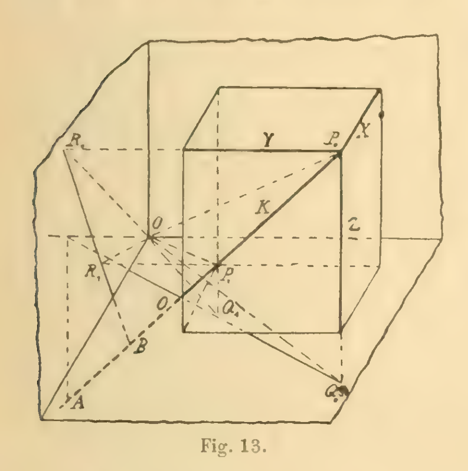


Fig. 13.

Sehr häufig werden aber auch noch die „Drehungsmomente“ L, M, N der Kraft K in bezug auf die Koordinatenachsen gebraucht*). Sie lassen sich sofort nach dem Satz ermitteln, daß das Moment einer Kraft in bezug auf irgend eine Achse stets gleich der algebraischen Summe der Momente der Komponenten in bezug auf dieselbe Achse ist.

Wenn noch das Übereinkommen getroffen ist, daß das Moment einer Kraft in bezug auf die x-, die y- und die z-Achse positiv oder negativ gesetzt wird, je nachdem es im

*) Drehungsmoment einer Kraft in bezug auf eine Achse ist gleich dem Produkt aus der Kraft, dem kürzesten Abstand zwischen Kraftlinie und Achse und dem Sinus des von ihnen gebildeten Winkels.

Sinne der Drehung der $+y$- nach der $+z$-, der $+z$- nach der $+x$- und der $+x$- nach der $+y$-Achse um 90° oder im entgegengesetzten Sinne in Anschlag kommt, so folgt:

$$\begin{aligned} &\text{Moment von } \boldsymbol{X} \text{ in bezug auf } x\text{-Achse} = 0,\\ &\quad ,, \quad ,, \quad \boldsymbol{Y} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad = -z_0 Y,\\ &\quad ,, \quad ,, \quad \boldsymbol{Z} \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad = y_0 Z. \end{aligned}$$

Daher Moment L von K in bezug auf x-Achse $= y_0 Z - z_0 Y$. Ganz ebenso leitet man $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{N}$ ab, also:

$$\boldsymbol{L} = y_0 \boldsymbol{Z} - z_0 \boldsymbol{Y}, \; \boldsymbol{M} = z_0 \boldsymbol{X} - x_0 \boldsymbol{Z}, \; \boldsymbol{N} = x_0 \boldsymbol{Y} - y_0 \boldsymbol{X} \qquad 3)$$

oder auch nach Einsetzen von 1):

$$\boldsymbol{L} = y_0 z_1 - z_0 y_1, \quad \boldsymbol{M} = z_0 x_1 - x_0 z_1, \quad \boldsymbol{N} = x_0 y_1 - y_0 x_1. \qquad 4)$$

$$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \qquad 5)$$

also die drei Komponenten und die drei Drehungsmomente von K, werden auch die Koordinaten der Kraft genannt. Sie sind aber nicht voneinander abhängig, sondern durch die für die Mechanik so wichtige Identität:

$$\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{L} + \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{M} + \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{N} = 0 \qquad 6)$$

miteinander verbunden. [Siehe 4), § 8.]

Wenn eine Kraft an einem absolut starren Körper angreift, so kann man sie bekanntlich in ihrer eigenen Richtung beliebig verschieben, ohne ihre Wirkung im geringsten zu ändern. Es bleiben aber dann auch die Komponenten und Drehungsmomente so, wie sie waren. Setzt man jedoch in derselben Kraftlinie eine gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft voraus, so wechseln ihre Koordinaten 5) ihre Vorzeichen. Wird dagegen die Kraft vergrößert oder verkleinert, so vergrößern und verkleinern sich die Koordinaten in demselben Verhältnis.

Sieht man nun von dem der Mechanik entnommenen Begriff der Kraft ab, so bleibt nur eine **Länge** $K = P_0 P_1$ zwischen zwei **beliebigen** Punkten einer Geraden l. $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ werden die Projektionen dieser Länge auf die Koordinatenachsen, $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ aber das Doppelte der Projektionen des Dreiecks OP_0P_1 auf die Koordinatenebenen. Dann bezeichnet man nach Plücker die sechs Größen 5) als Koordinaten von l, mit dem ausdrücklichen und hier ein für allemal betonten Vorbehalt, daß es wesentlich nur auf

ihre Verhältnisse ankommt, da man eben K beliebig vergrößern und verkleinern und auch die Richtung von K wechseln kann.

Diese Plückerschen Linienkoordinaten sind vollkommen symmetrisch und das ist ihr großer Vorzug. Freilich hat man nun ihrer sechs, statt früher nur vier und das ist wieder ein Nachteil, der aber bei weitem nicht den Vorzug aufhebt. Man muß immer die Identität 6) im Auge behalten, vermittelst welcher eine Koordinate eliminiert werden kann. Da aber außerdem nur die Verhältnisse der Koordinaten in Betracht kommen, so bleiben zuletzt doch nur vier voneinander unabhängige Bestimmungen für die Lage der Geraden im Raum, ganz wie in § 9.

Man kann der aus 2) folgenden Proportion für die Richtung von l:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{Z} \tag{7}$$

eine andere für die Richtung der Normale auf die durch l und den Anfangspunkt gehende Ebene zur Seite stellen, nämlich:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \boldsymbol{L} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{N}, \tag{8}$$

wo λ, μ, ν die Richtungskosinus dieser Normalen sind. (Denn L, M, N verhalten sich wie die Projektionen eines in dieser Ebene liegenden Dreiecks auf die Koordinatenebenen und letztere verhalten sich wie diese Richtungskosinus.) Die Identität 6) geht daher in die Bedingung über:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0,$$

d. h. l soll auf der Normalen senkrecht stehen, wie in der Tat der Fall.

Ist eine der Koordinaten $\boldsymbol{X}$ oder $\boldsymbol{Y}$ oder $\boldsymbol{Z} = 0$, so steht l auf der zugehörigen Koordinatenachse senkrecht. Ist dagegen $\boldsymbol{L}$ oder $\boldsymbol{M}$ oder $\boldsymbol{N} = 0$, so schneidet l die entsprechende Achse. Ist l parallel zur z-Achse, so werden $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{N} = 0$, parallel zur x-Achse, so $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{L} = 0$, parallel zur y-Achse, so $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} = \boldsymbol{M} = 0$. Geht l durch den Anfangspunkt, so wird $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{N} = 0$. Entfernt sich l unbegrenzt weit, so werden die Drehungsmomente unendlich groß, falls man den Kräftekomponenten endliche Werte gibt, oder letztere unendlich klein, falls die Drehungsmomente endlich bleiben, d. h.: wenn $\boldsymbol{X} = 0$, $\boldsymbol{Y} = 0$, $\boldsymbol{Z} = 0$, so ist l unendlich fern [liegt in der

unendlich fernen Ebene*)]. Ist $X = 0$, $M = 0$, $N = 0$ oder $Y = 0$, $N = 0$, $L = 0$ oder $Z = 0$, $L = 0$, $M = 0$, so liegt l in der yz-, der zx-, der xy-Ebene. Sind alle Koordinaten $= 0$, außer X oder Y oder Z, so fällt l mit einer Koordinatenachse zusammen. Ist aber nur L oder nur M oder nur N von Null verschieden, so fällt l mit der Schnittlinie einer Koordinatenebene und der unendlich fernen Ebene zusammen.

Man sieht also, wie die Koordinaten der geraden Linie auf das innigste mit dem Koordinatentetraeder, bestehend aus den Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene, mit den Flächen, Ecken und Kanten desselben zusammenhängen.

Da in 3) der Punkt P_0 ein beliebiger Punkt der Geraden werden kann, so stellen die Gleichungen:

$$yZ - zY - L = 0,\quad zX - xZ - M = 0,\quad xY - yX - N = 0 \qquad 9)$$

ohne weiteres die drei Projektionen von l auf die yz-, die zx- und die xy-Ebene vor, wenn x, y, z als „laufend" angesehen werden.

Aus ihnen folgt noch die Ebene durch l und den Anfangspunkt:

$$xL + yM + zN = 0. \qquad 9a)$$

Entwickelt man aus den beiden letzten Gleichungen 9) y und z, also:

$$y = x\frac{Y}{X} - \frac{N}{X};\quad z = x\frac{Z}{X} + \frac{M}{X},$$

so fällt man wieder auf die Gleichungen 1) des vorigen Paragraphen zurück und kann nun von den neuen Plückerschen zu den alten Koordinaten übergehen. Es wird demnach:

$$a = \frac{Y}{X},\quad b = -\frac{N}{X},\quad c = \frac{Z}{X},\quad d = \frac{M}{X}. \qquad 10)$$

Wie nicht anders zu erwarten, zeigen diese Ausdrücke für a, b, c, d keine Symmetrie. Denn erstens sind die Verhältnisse der anderen Koordinaten zu X teils mit positiven, teils mit negativen Vorzeichen gebildet und zweitens ist die Koordinate L überhaupt nicht benutzt worden. Diese

*) Dies entspricht dem Kräftepaar von Poinsot, als Grenzfall einer Kraft, die sich immer weiter entfernt und dabei immer kleiner wird, während ihre Drehungsmomente endlich bleiben.

erscheint vielmehr erst bei der Transformation der überzähligen Größe e.

$$e = bc - ad = -\frac{YM + ZN}{X^2}, \text{ also nach 6):}$$

$$e = \frac{L}{X}. \qquad 10a)$$

Die Richtigkeit von 10) und 10a) geht übrigens auch sofort aus 3), § 9 und den Ausdrücken 1) und 4) hervor.

Letztere geben die Plückerschen Koordinaten von l vermittelst zweier auf ihr liegender Punkte $P_0(x_0 y_0 z_0)$ und $P_1(x_1 y_1 z_1)$. Sind statt dieser aber irgend zwei durch l gehende Ebenen $E_0(u_0 v_0 w_0)$ und $E_1(u_1 v_1 w_1)$ gegeben, so ziehe man die Ausdrücke 4), § 9 zu Rate und gehe dann nach 10) und 10a) zu den Plückerschen Koordinaten über. Man findet dann:

$$X : Y : Z : L : M : N$$
$$= v_0 w_1 - w_0 v_1 : w_0 u_1 - u_0 w_1 : u_0 v_1 - v_0 u_1 : u_1 - u_0 : v_1 - v_0 : w_1 - w_0, \qquad 11)$$

so daß die sechs Ausdrücke rechts sofort als die sechs Koordinaten von l angesehen werden können.

Nach Einführung der Plückerschen Koordinaten erhalten die Hauptformeln des vorigen Paragraphen die folgende durchaus symmetrische Gestalt:

Der Abstand Δ irgend eines Punktes $P(x, y, z)$ von irgend einer Geraden l (X, Y, Z, L, M, N):

$$\Delta = \frac{\sqrt{(yZ - zY - L)^2 + (zX - xZ - M)^2 + (xY - yX - N)^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \qquad 12)$$

Der Winkel φ zwischen zwei Geraden l und l_1 wird durch die Formel gegeben:

$$\cos\varphi = \frac{XX_1 + YY_1 + ZZ_1}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \qquad 13)$$

Der kürzeste Abstand Δ zwischen zwei Geraden l und l_1

$$\Delta = \frac{XL_1 + YM_1 + ZN_1 + X_1 L + Y_1 M + Z_1 N}{\sqrt{(YZ_1 - ZY_1)^2 + (ZX_1 - XZ_1)^2 + (XY_1 - YX_1)^2}}. \qquad 14)$$

Die Bedingung, daß zwei Gerade l und l_1 sich schneiden:

$$0 = XL_1 + YM_1 + ZN_1 + X_1 L + Y_1 M + Z_1 N. \qquad 14a)$$

Wenn diese Bedingung für zwei Gerade l_1 und l_2 erfüllt ist, so geben die Formeln:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \boldsymbol{X}_1 + \lambda \boldsymbol{X}_2, & \boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{Y}_1 + \lambda \boldsymbol{Y}_2, & \boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{Z}_1 + \lambda \boldsymbol{Z}_2, \\ \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{L}_1 + \lambda \boldsymbol{L}_2, & \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{M}_1 + \lambda \boldsymbol{M}_2, & \boldsymbol{N} &= \boldsymbol{N}_1 + \lambda \boldsymbol{N}_2 \end{aligned} \tag{15}$$

alle Strahlen des durch l_1 und l_2 bestimmten Strahlenbüschels.

Transformation der Plückerschen Koordinaten. Wird das gegebene Koordinatensystem mit einem anderen vertauscht, so müssen sich die Linienkoordinaten ändern, wie die Punktkoordinaten [15), § 3] und die Ebenenkoordinaten [15), § 7]. Um die diesen Formeln entsprechenden Transformationen der Plückerschen Koordinaten abzuleiten, setze man in 15), § 3 irgend zwei Punkte $P_0(x_0 y_0 z_0)$ und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ ein, bezeichne die Koordinaten derselben Punkte nach der Transformation mit x'_0, y'_0, z'_0; x'_1, y'_1, z'_1, bilde dann, gemäß den Formeln 1) und 4), zunächst die Koordinaten $\boldsymbol{X\,Y\,Z\,L\,M\,N}$ im alten Koordinatensystem, und suche endlich durch Umformung die Koordinaten $\boldsymbol{X'\,Y'\,Z'\,L'\,M'\,N'}$ einzuführen.

Die Komponenten machen gar keine Mühe. Man findet auf der Stelle:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= a_1 \boldsymbol{X}' + a_2 \boldsymbol{Y}' + a_3 \boldsymbol{Z}', \\ \boldsymbol{Y} &= b_1 \boldsymbol{X}' + b_2 \boldsymbol{Y}' + b_3 \boldsymbol{Z}', \\ \boldsymbol{Z} &= c_1 \boldsymbol{X}' + c_2 \boldsymbol{Y}' + c_3 \boldsymbol{Z}'. \end{aligned} \tag{16}$$

Mehr Rechnung erfordern die Drehungsmomente. Es ist:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = y_0 z_1 - z_0 y_1 &= (b + b_1 x'_0 + b_2 y'_0 + b_3 z'_0)(c + c_1 x'_1 + c_2 y'_1 + c_3 z'_1) \\ &- (b + b_1 x'_1 + b_2 y'_1 + b_3 z'_1)(c + c_1 x'_0 + c_2 y'_0 + c_3 z'_0). \end{aligned}$$

Nach Auflösen der Klammern entstehen 32 Glieder, von denen 8 sich gegenseitig aufheben. Die übrigen 24 lassen sich folgendermaßen zusammenziehen:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} = (x'_1 - x'_0)(b c_1 - c b_1) &+ (y'_1 - y'_0)(b c_2 - c b_2) + (z'_1 - z'_0)(b c_3 - c b_3) \\ + (y'_0 z'_1 - z'_0 y'_1)(b_2 c_3 - c_2 b_3) &+ (z'_0 x'_1 - x'_0 z'_1)(b_3 c_1 - c_3 b_1) \\ &+ (x'_0 y'_1 - y'_0 x'_1)(b_1 c_2 - c_1 b_2). \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind in dieser Formel rechts die Koordinaten von P_0 und P_1 auch im neuen System zu Linienkoordinaten der durch sie gehenden Geraden zusammengefügt. Benutzt man noch die Formeln 6), § 3 zur Vereinfachung und transformiert in derselben Weise $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{N}$, so entsteht die andere Hälfte der Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= a_1 \boldsymbol{L}' + a_2 \boldsymbol{M}' + a_3 \boldsymbol{N}' + (b c_1 - c b_1) \boldsymbol{X}' + (b c_2 - c b_2) \boldsymbol{Y}' + (b c_3 - c b_3) \boldsymbol{Z}', \\ \boldsymbol{M} &= b_1 \boldsymbol{L}' + b_2 \boldsymbol{M}' + b_3 \boldsymbol{N}' + (c a_1 - a c_1) \boldsymbol{X}' + (c a_2 - a c_2) \boldsymbol{Y}' + (c a_3 - a c_3) \boldsymbol{Z}', \\ \boldsymbol{N} &= c_1 \boldsymbol{L}' + c_2 \boldsymbol{M}' + c_3 \boldsymbol{N}' + (a b_1 - b a_1) \boldsymbol{X}' + (a b_2 - b a_2) \boldsymbol{Y}' + (a b_3 - b a_3) \boldsymbol{Z}'. \end{aligned} \tag{16a}$$

Also auch die Transformationen der Linienkoordinaten sind linear, wie diejenigen der Punkt- und der Ebenenkoordinaten. Übrigens findet man aus 16) und 16a) nach einigen Reduktionen die Formel:

$$XL + YM + ZN \equiv X'L' + Y'M' + Z'N',$$

wie nicht anders zu erwarten war, da die Identität 6) ohne jede Voraussetzung über das gewählte Koordinatensystem gilt und sich daher in unveränderter Form transformieren muß.

Haben beide Koordinatensysteme denselben Anfangspunkt, d. h. ist $a = b = c = 0$, so verschwinden in 16a) die Koeffizienten der Komponenten. Es transformieren sich also die Komponenten unter sich und die Drehungsmomente auch unter sich. Bleiben die Achsen parallel, sind also $a_1 = b_2 = c_3 = 1$ und $a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$, so wird sehr einfach:

$$\begin{gathered} X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \\ L = L' + bZ' - cY', \quad M = M' + cX' - aZ', \\ N = N' + aY' - bX'. \end{gathered} \tag{16b}$$

Gleichungen in Linienkoordinaten. Linienkomplexe. In § 4 ist ausführlich erläutert worden, daß eine Gleichung in Punktkoordinaten:

$$F(x, y, z) = 0,$$

im allgemeinen eine Fläche darstellt, insofern alle Punkte, welche diese Gleichung erfüllen, auf dieser Fläche liegen. Dann ist in § 7 darauf hingewiesen worden, daß auch eine Gleichung in Ebenenkoordinaten:

$$F(u, v, w) = 0$$

sich auf eine Fläche bezieht, insofern sie von allen Ebenen, welche diese Gleichung erfüllen, berührt wird.

Was aber für ein Gebilde hat man an einer Gleichung in Linienkoordinaten?

$$F(X, Y, Z, L, M, N) = 0. \tag{17}$$

Zur Beantwortung dieser Frage beachte man zunächst, daß eine solche Gleichung nur einen Sinn haben kann, wenn sie homogen ist, da es eben nur auf die Verhältnisse der Koordinaten ankommt und daß auch von vornherein die Identität 6) mitzunehmen ist, so daß, wenn nötig, immer eine Koordinate entfernt werden kann.

Die Gleichung 17) ist nichts mehr und nichts weniger als der analytische Ausdruck für die Gesamtheit derjenigen Geraden, deren Koordinaten diese Gleichung erfüllen. Da die Gesamtheit aller Geraden überhaupt eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit bildet (siehe § 9), so wird durch das Setzen einer einzigen Gleichung, also einer und nur einer Bedingung, eine Auswahl getroffen werden, die noch eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit in sich birgt.

Nun bilden offenbar sämtliche Tangenten an irgend eine Fläche eine derartige Mannigfaltigkeit, da jede Fläche eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten enthält und in jedem Punkte einfach unendlich viele Linien die Fläche berühren, Linien, die alle in der Berührungsebene liegen und demnach ein Strahlenbüschel bilden. Sollte also etwa im allgemeinen eine Gleichung 17) auch eine Fläche darstellen, insofern 17) von allen Geraden erfüllt wird, welche dieselbe berühren?

Diese Vermutung liegt nahe und läßt sich leicht genug durch Beispiele, in denen sie zutrifft, stützen. So betrachte man in der Formel 12) für den Abstand $\varDelta$ eines Punktes xyz von einer Geraden diesen Punkt und auch $\varDelta$ als gegeben. Nach Fortschaffung der Wurzeln und des Nenners entsteht dann eine Gleichung zweiten Grades von der Form 17), welche hiernach die Gesamtheit aller Geraden vorstellt, welche von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand haben und also identisch ist mit der Gesamtheit aller Tangenten an eine Kugel um den gegebenen Punkt als Mittelpunkt und mit dem gegebenen Abstand $\varDelta$ als Radius. Oder man sehe in der Formel 14) für den Abstand $\varDelta$ zweier Geraden l und l_1 die eine Gerade l_1 und den Abstand $\varDelta$ als gegeben an, so entsteht ebenfalls nach Fortschaffen der Wurzel und des Nenners für l eine Gleichung zweiten Grades von der Form 17), die hiernach die Gesamtheit aller Geraden l vorstellt, welche von einer gegebenen Geraden l_1 einen gegebenen kürzesten Abstand haben und also identisch ist mit der Gesamtheit aller Tangenten an einen Kreiszylinder um l_1 als Achse, dessen Radius gleich $\varDelta$ ist.

Die geäußerte Vermutung hat auch insofern etwas Bestrickendes, als sie dem großen Prinzip der Dualität zwischen

Punkt und Ebene durchaus Rechnung trägt, da eine Tangente an eine Fläche ebensogut als Verbindungslinie zweier benachbarter Punkte der Fläche, wie auch als Schnittlinie zweier benachbarter Berührungsebenen angesehen werden kann. Auch ist die Umkehrung unzweifelhaft richtig, da man unter allen Umständen die Bedingung, daß eine Gerade eine gegebene Fläche berühre, durch eine Gleichung zwischen ihren Koordinaten wird ausdrücken können.

Und dennoch ist die Vermutung im „allgemeinen" falsch und trifft nur im „besonderen" zu! Im allgemeinen vielmehr wird durch eine Gleichung von der Form 17) ein Gebilde ganz anderer Art bestimmt, das schlechterdings in keiner Weise zu irgend einer Fläche in Beziehung gesetzt werden kann, sondern einen ganz eigenen geometrischen Charakter besitzt.

Ein einfaches Beispiel wird dies am besten erläutern. Man stelle die Bedingung, daß eine Gerade l von zwei gegebenen Punkten, die man der Einfachheit wegen beide auf der x-Achse und gleichweit vom Mittelpunkt entfernt annehmen mag, also von zwei Punkten $P_1(+x, 0, 0)$, $P_2(-x, 0, 0)$ gleichen Abstand habe. Man drücke dann nach 12) diese beiden Abstände aus und setze sie einander gleich. Nach Weglassung des gemeinsamen Nenners und des Faktors $2x$ entsteht dann die Gleichung:

$$\boldsymbol{MZ} - \boldsymbol{NY} = 0, \tag{18}$$

also eine Gleichung von der Form 17).

Offenbar ist jede in der yz-Ebene liegende Gerade von P_1 und P_2 gleichweit entfernt. In der Tat ist für jede solche Gerade $\boldsymbol{X} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$, $\boldsymbol{N} = 0$, also die Gleichung 18) erfüllt. Dann aber ist auch jede durch den Anfangspunkt gehende Gerade von P_1 und P_2 gleichweit entfernt. Es ist dann $\boldsymbol{L} = 0$, $\boldsymbol{M} = 0$, $\boldsymbol{N} = 0$, also die Gleichung auch erfüllt. Aber auch jede zur x-Achse parallele Gerade ($\boldsymbol{Y} = 0$, $\boldsymbol{Z} = 0$) ist von P_1 und P_2 gleichweit entfernt und erfüllt die Gleichung.

Schon aus dieser Aufzählung, die nur einen verschwindend kleinen Bruchteil aller von P_1 und P_2 gleichweit entfernten Geraden umfaßt, geht die Unmöglichkeit hervor, daß durch die Gleichung $\boldsymbol{MZ} - \boldsymbol{NY} = 0$ eine Mannigfaltigkeit von

Geraden bestimmt werde, die alle ein und dieselbe Fläche berühren. Dies wird aber noch klarer, wenn man eine beliebige Gerade l dieser Mannigfaltigkeit betrachtet und die Bedingung, daß sie von P_1 und P_2 gleichen Abstand habe, durch die leicht abzuleitende Folgerung ersetzt, daß das Lot OQ von O auf l in der yz-Ebene liegen muß*).

Diese zweite Deutung von 18) führt nun zu der folgenden Konstruktion: Man bestimme in jeder zur yz-Ebene senkrechten Ebene den Fußpunkt Q des von O gefällten Lotes und zeichne in ihr das Strahlenbüschel mit Q als Zentrum. Die Gesamtheit dieser Strahlenbüschel ist dann identisch mit der Gesamtheit aller durch 18) bestimmten Geraden.

Damit ist der Nachweis, daß die Gleichung 18) ein Gebilde ganz anderer Art darstellt, als sämtliche Tangenten irgend einer Fläche, erschöpfend geführt worden. Und ein gleiches gilt im allgemeinen für eine beliebige Gleichung 17), wenn auch, wie die früheren Beispiele zeigen, die Identität mit den Tangenten einer Fläche als „besonderer“ Fall durchaus nicht ausgeschlossen ist.

Plücker bezeichnet ganz allgemein solche aus geraden Linien, die nur einer Bedingung 17) unterstellt sind, bestehenden Gebilde als Linienkomplexe oder Strahlenkomplexe, deren Eigenschaften seitdem auch von anderen Mathematikern vielfach und eingehend untersucht worden sind.

Die Erlangung einer klaren Einsicht in die wesentlichsten geometrischen Eigentümlichkeiten dieser Gebilde stellt erhöhte Ansprüche an die Raumanschauung gegenüber der einfachen Vorstellung einer beliebig im Raume sich ausdehnenden Fläche. Man rechnet daher auch die Strahlenkomplexe noch nicht so ganz zu den Elementen der Geometrie des Raumes; doch spielt wieder die gerade Linie nicht allein in der reinen Geometrie, sondern auch in den Anwendungen, so für die Mechanik als

*) Man fälle von P_1, P_2 und O die drei Lote P_1Q_1, P_2Q_2 und OQ auf l und projiziere auf eine zu l senkrechte Ebene, so daß Q_1, Q_2 und Q scheinbar zusammenfallen. Die Längen der drei Lote und ihre Richtungen bleiben dabei unverändert. Da P_1Q_1 und P_2Q_2 einander gleich sein sollen und O Mitte von P_1P_2 ist, so wird OQ Mittelsenkrechte in dem gleichschenkligen Dreieck, das P_1Q_1 und P_2Q_2 in der Projektion bilden. Also steht OQ auch auf P_1P_2 senkrecht und ist der kürzeste Abstand von l und P_1P_2.

Kraftlinie, für die Optik als Lichtstrahl, für die zeichnerische Darstellung als Projektionsstrahl eine so hervorragende Rolle, daß ein Eingehen, wenigstens auf die einfachsten Komplexe, nämlich diejenigen ersten Grades, geboten erscheint; schon in Anbetracht ihrer innigen Beziehungen zu den räumlichen Kraftsystemen, deren Theorie auch in der Technik bei Durchrechnung der Beanspruchung an verwickelteren Konstruktionen Jahr für Jahr an Bedeutung gewinnt.

Übungsaufgaben.

1. Es sind Kriterien aufzustellen bezüglich linksgängig oder rechtsgängig einer Geraden l zu den drei Achsen des Koordinatensystems. Zu beweisen, daß keine Gerade zu allen dreien rechtsgängig oder zu allen dreien linksgängig sein kann.

2. Es sind die Bedingungen (Ungleichungen) aufzustellen, welche erfüllt sein müssen, damit eine Gerade l einen gegebenen Würfel von der Länge $2a$, dessen Kanten zu den Achsen parallel sind und dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, schneidet.

3. Ein starrer Körper hat um die x-Achse eine Schraubenbewegung ausgeführt (Drehwinkel $= \alpha$, Verschiebung in der Richtung der x-Achse $= h$). Die beiden Lagen jedes Punktes dieses Körpers zu Anfang und zum Schluß der Bewegung sind durch eine Gerade l verbunden. Es soll der Komplex dieser Geraden analytisch dargestellt werden. Darauf ist eine Beziehung zwischen dem Abstand $\varDelta$ und dem Winkel φ abzuleiten, welche l mit der x-Achse bilden.

---

§ 11.

Der Strahlenkomplex ersten Grades und das Nullsystem.

Vorgelegt sei eine Gleichung ersten Grades:

$$AX + BY + CZ + DL + EM + FN = 0, \qquad 1)$$

in welcher A, B, C, D, E, F sechs beliebig gegebene Koeffizienten sein sollen. Wie ist der zugehörige Strahlenkomplex beschaffen? Welche Struktur hat er?

Die Formel 14a), § 10 für die Bedingung, daß zwei Gerade im Raume sich schneiden, führt zu einer Gleichung von der Form 1), wenn eine derselben, etwa l_1, als gegeben betrachtet wird. Es wird dann nach 14a), § 10:

$$A = L_1,\ B = M_1,\ C = N_1,\ D = X_1,\ E = Y_1,\ F = Z_1. \qquad 2)$$

Da aber die sechs Koordinaten einer Geraden unter allen Umständen der Bedingung 6), § 10 genügen müssen, die sich hier in die Gleichung:

$$AD + BE + CF = 0 \tag{3}$$

verwandelt, so folgt:

Der Strahlenkomplex 1) stellt alle Geraden l dar, welche eine gegebene Gerade l_1 schneiden, **wenn** zwischen den Koeffizienten die Bedingung 3) besteht. Die Koordinaten von l_1 werden durch 2) bestimmt.

In diesem Falle liegt also das Wesen des Strahlenkomplexes zutage. Die Gleichung 3) wird z. B. erfüllt, wenn fünf der Koeffizienten $= 0$ sind. In der Tat möge sich die Gleichung 1) reduzieren auf $\boldsymbol{L} = 0$, so heißt das, l soll die x-Achse schneiden, oder auf $X = 0$, so muß l auf der x-Achse senkrecht stehen, d. h. l muß diejenige „unendlich ferne" Gerade schneiden, in welcher alle zur x-Achse senkrechten Ebenen zusammentreffen.

Wenn aber die Gleichung 3) nicht erfüllt wird, die sechs Koeffizienten vielmehr ganz willkürlich angenommen werden? Um dann der Sache auf den Grund zu kommen, ist es ratsam, zur Erleichterung der Darstellung die vorgelegte Gleichung 1) durch eine Koordinatentransformation auf die einfachste Form zu bringen, deren sie fähig ist. Behält man zunächst den Anfangspunkt bei, setzt also in 16a), § 10 $a = b = c = 0$, so folgt durch Umkehrung:

$$a_1 \boldsymbol{L} + b_1 \boldsymbol{M} + c_1 \boldsymbol{N} = \boldsymbol{L}'.$$

Richtet man es also so ein, daß $a_1 : b_1 : c_1 = D : E : F$, so wird durch die Transformation die Summe $D\boldsymbol{L} + E\boldsymbol{M} + F\boldsymbol{N}$ in ein einziges Glied $D'\boldsymbol{L}'$ zusammengezogen [vgl. 5a), § 3, S. 30]. Daher:

Man kann durch Drehung um den Anfangspunkt E und F zum Verschwinden bringen und die Gleichung 1) auf die Form:

$$AX + BY + CZ + D\boldsymbol{L} = 0 \tag{1a}$$

reduzieren. Nachdem dies geschehen, verschiebe man den Koordinatenanfangspunkt, behalte aber die Achsenrichtungen bei. Nach 16b), § 10 wird die neue Gleichung:

$$AX' + BY' + CZ' + D(\boldsymbol{L}' + bZ' - cY') = 0$$

oder:

$$AX' + (B - Dc)Y' + (C + Db)Z' + D\boldsymbol{L}' = 0.$$

Setzt man daher:

$$c = + \frac{B}{D}, \quad b = - \frac{C}{D},$$

so wird eine neue Reduktion um zwei Glieder erreicht. Sollte aber in 1a) $D = 0$ sein [oder in 1) $D = E = F = 0$], dann war die erste Transformation überhaupt nicht nötig und man hätte vielmehr so drehen können, daß B und C verschwinden. Daher:

Man kann es stets durch Koordinatentransformation dahin bringen, daß $B = C = E = F = 0$ werden, d. h. daß die Gleichung 1) die einfache Gestalt erhält:

$$AX + DL = 0 \quad \text{oder} \quad L = k \cdot X. \tag{1b}$$

Es bleibt dann somit nur noch ein Koeffizient $k = - \frac{A}{D} = \frac{L}{X}$ übrig, die sogenannte Konstante des Komplexes. Sie ist, geometrisch gedeutet, eine Länge, da L nach 4), § 10 von der zweiten, X nach 1), § 10 von der ersten Dimension in bezug auf Punktkoordinaten wird.

Die x-Achse heißt „Achse" des Komplexes. Erinnert man sich der Deutung der Plückerschen Koordinaten als Komponenten und Drehungsmomente einer Kraft, so gibt die Gleichung 1b) folgende einfache Auffassung der linearen Komplexe:

Ein Strahlenkomplex erster Ordnung besteht aus allen Geraden, welche, als Kraftlinien genommen, in bezug auf ein und dieselbe Gerade im Raum — die sogenannte Achse des Komplexes — ein konstantes Verhältnis des Drehungsmomentes zur Komponente haben.

Hat die Gleichung des Komplexes einmal die Form 1b) erhalten, so ändert sich an ihr nichts mehr, wenn man den Anfangspunkt auf der Achse verschiebt, ohne Richtungsänderung von x, y, z. Denn die Transformation 16b), § 10 ergibt dann (da jetzt $b = c = 0$) $X = X'$ und $L = L'$. Ebenso ändert sich nichts mehr bei einer Drehung um die x-Achse. Denn da in diesem Falle $a = b = c = 0$, so folgt nach 16) und 16a), § 10 in Verbindung mit 2), § 3, d. h. mit

$$a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = 0, \quad a_1 = 1$$

auch:

$$X = X', \quad L = L'.$$

Daher:

Der lineare Strahlenkomplex verträgt jede Verschiebung längs und jede Drehung um seine Achse. Er verträgt also auch jede Schraubenbewegung um diese Achse, d. h. der Komplex schraubt sich dabei „in sich selbst" und jeder Strahl desselben bleibt Strahl.

Dies ist durchaus in Übereinstimmung mit der vorhin gegebenen Deutung solcher Komplexe. Sie sind völlig symmetrisch um ihre Achse — gleichsam die Mittellinie des Komplexes —, zeigen aber keine Beziehung zu irgend einem besonderen Punkt derselben, der etwa als Mittelpunkt des Komplexes gelten könnte.

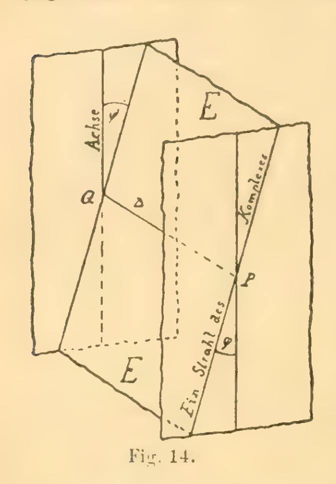


Fig. 14.

Wenn ein Strahl des Komplexes irgend eine Schraubenbewegung um die Achse mitmacht, so bleibt er ein Strahl. Es bleiben aber auch sein Abstand von der Achse und sein Winkel mit ihr unverändert und die Gleichung 1 b) wird wohl zuletzt herauskommen auf eine Beziehung zwischen diesem Abstand $\varDelta = QP$ und diesem Winkel φ (Fig. 14). In der Tat folgt aus 14), § 10:

$$\varDelta = \frac{L}{\sqrt{Y^2 + Z^2}},$$

da für die x-Achse $Y_1 = Z_1 = L_1 = M_1 = N_1 = 0$. Ferner ergibt sich aus 2), § 10:

$$\cos\varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

oder hier besser: $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{X},$$

somit: $$\varDelta \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{L}{X},$$

daher nach 1 b): $$\varDelta \cdot \operatorname{tg}\varphi = k. \qquad 4)$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen $\varDelta$ und φ. Sie erschließt die Struktur des Komplexes, da mit ihr eine

rein geometrische Definition desselben gesetzt wird. Um sie eindeutig zu machen, bedarf es aber noch eines Übereinkommens bezüglich der Vorzeichen von $\varDelta$ und φ. Wenn N positiv genommen wird, so wird nach 1 b) L positiv oder negativ, je nachdem k positiv oder negativ ist. Im ersten Falle ist das Drehungsmoment „links", im zweiten „rechts" herum. Somit sind nach der auf S. 98 eingeführten Bezeichnung die Strahlen des Komplexes in bezug auf seine Achse entweder alle rechtsgängig — wenn k positiv — oder alle linksgängig — wenn k negativ. — Man greife nun irgend einen Strahl des Komplexes heraus und wähle seinen Standpunkt so, daß die Achse „hinter" dem Strahl bleibt und ihre Positivrichtung nach „oben" geht. Dann weicht die Positivrichtung der Achse vom Strahl nach links um einen spitzen Winkel φ ab, wenn k positiv (Figur), und nach links um einen stumpfen Winkel φ, wenn k negativ ist. Im ersten Falle ist also $\operatorname{tg}\varphi$ positiv, im letzteren negativ zu nehmen, wenn $\varDelta$, wie wir festsetzen wollen, absolut, also ohne Vorzeichen gesetzt wird.

Wenn $\varDelta = 0$, so ist nach 4) $\varphi = 90^0$, d. h. alle Gerade, welche die Achse senkrecht schneiden, gehören dem Komplex an. Je größer $\varDelta$ wird, desto kleiner wird φ. Ist $\varDelta = k$, so wird $\varphi = 45^0$. Man kann daher die Konstante des Komplexes auch definieren als den Abstand derjenigen seiner Strahlen von der Achse, die mit dieser einen Winkel von 45^0 bilden. Wird $\varDelta$ größer als k, so wird $\varphi < 45^0$ und für $\lim \varDelta = \infty$ wird $\lim \varphi = 0$, d. h. die Richtung der Strahlen nähert sich immer mehr der Richtung der Achse, je größer der Abstand. Aber Strahlen parallel zur Achse gibt es nur im Unendlichen.

Wenn $k = 0$, so ist $\varDelta = 0$ oder $\varphi = 0$, d. h. der Komplex besteht aus allen Geraden, welche die Achse schneiden oder ihr parallel sind (d. h. die Achse in der Unendlichkeit schneiden). Der zweite Grenzfall $k = \infty$ gibt $\varphi = 90^0$. Der Komplex besteht dann aus allen zur Achse senkrechten Geraden. Er hat somit keine eigentliche Achse mehr, da eine jede zu den Strahlen senkrechte Gerade als Achse genommen werden kann.

Wenn nun auch diese eben geführten Untersuchungen die geometrische Struktur linearer Strahlenkomplexe wohl der unmittelbaren Anschauung zugänglich machen, so wird man doch bereitwillig zugeben, daß die anderen linearen Gebilde, also:

geradlinige Punktreihe, Ebenenbüschel und Strahlenbüschel, ebenes System und Bündel ungleich leichter aufgefaßt werden und klarer, deutlicher vor Augen stehen. Es fehlt dem linearen Strahlenkomplex in mancher Hinsicht die Einfachheit des linearen Charakters und der Grund hiervon ist vom analytischen Standpunkt in der Identität 6), § 10 zu suchen, welche für die Koordinaten der geraden Linie vom zweiten Grade ist.

Das Nullsystem. Die Beschaffenheit des linearen Komplexes wird wesentlich durch seine Beziehungen zu den Punkten und Ebenen des Raumes bedingt.

Welche Strahlen desselben gehen durch einen beliebig gegebenen Punkt im Raume und welche liegen in einer beliebig gegebenen Ebene?

Zur Beantwortung der ersten Frage setze man die Ausdrücke 1) und 4), § 10 der Plückerschen Koordinaten durch zwei Punkte P_0 und P_1 der Geraden in 1 b) ein. Man erhält:

$$y_0 z_1 - z_0 y_1 - k(x_1 - x_0) = 0. \qquad \textbf{1c)}$$

Diese Gleichung ist für jeden der beiden Punkte P_0 und P_1 vom ersten Grade. Nimmt man den einen P_0 als gegeben an, so muß der andere P_1 somit in einer Ebene liegen, welche durch P_0 geht, da 1 c) identisch erfüllt wird für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$. Nun ist aber $P_0 P_1$ ein Strahl des Komplexes, also:

Sämtliche durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehende Strahlen des Komplexes liegen in einer Ebene E und bilden daher ein Strahlenbüschel.

Ganz ebenso würde nach Einsetzen von 11), § 10 in Verbindung mit 12), § 7, S. 76 zu schließen sein:

Sämtliche in einer gegebenen Ebene E liegende Strahlen des Komplexes gehen durch einen Punkt P und bilden daher ein Strahlenbüschel.

Beide Sätze sind hier Umkehrungen voneinander; sie sagen aus, daß alle Strahlen, welche durch einen Punkt gehen, auch in einer Ebene liegen und umgekehrt.

Mit dem linearen Strahlenkomplex ist, wie wir eben gesehen, innigst verknüpft eine eigenartige reziproke Verwandtschaft zwischen Punkt und Ebene, das sogenannte

„Nullsystem", mit dem charakteristischen Merkmal, daß jeder Punkt auf der ihm zugeordneten Ebene liegt. Läßt man in 1c) bei x_0, y_0, z_0 den Index fort und bezeichnet demzufolge P_0 einfach mit P, so ist die Gleichung der diesem Punkt P entsprechenden Ebene E:

$$-x_1 k - z y_1 + z_1 y + kx = 0,$$

wenn x_1, y_1, z_1 die laufenden Koordinaten sind.

Hieraus sind die Koordinaten u, v, w dieser Ebene E zu entnehmen:

$$u = -\frac{1}{x}, \quad v = -\frac{z}{kx}, \quad w = +\frac{y}{kx}, \tag{5}$$

woraus sofort durch Umkehrung folgt:

$$x = -\frac{1}{u}, \quad y = -\frac{kw}{u}, \quad z = +\frac{kv}{u}. \tag{6}$$

5) oder 6) sind die Formeln für das Nullsystem, denn sie geben zu jedem Punkt $P(xyz)$ die zugehörige Ebene $E(uvw)$ (Fig. 14) und zu jeder Ebene E den zugehörigen Punkt P. Daß aber stets P auf E liegt, kann man zum Überfluß noch aus dem Umstande ersehen, daß der Ausdruck:

$$ux + vy + wz + 1$$

nach Einsetzen von 5) oder 6) identisch gleich Null wird*), wie es sein muß.

Aus 5) und 6) folgt nach der Definition der Ebenenkoordinaten uvw (S. 75), daß $p = x$. E geht also durch den Fußpunkt Q des von P auf die Achse gefällten Lotes. E geht also auch durch dieses Lot selbst. Dasselbe ist eben auch ein Strahl des Komplexes, wie vorhin gezeigt.

Zur Bestimmung von E bedarf man also noch eines zweiten durch P gehenden Strahles. Hierzu nimmt man wohl am besten den auf dem Lot $QP = \Delta$ senkrechten, dessen Neigung φ gegen die Achse durch 4) bestimmt wird. Da er zur Projektion der Achse auf E parallel ist, so ist φ auch der Neigungswinkel der Achse gegen E. Daher die folgende Konstruktion des Nullsystems (Fig. 14):

Um zu einem gegebenen Punkt P die zugehörige Ebene E zu finden, fälle man das Lot $QP = \Delta$ auf die Achse und lege

*) Daher der Name „Nullsystem" zur Unterscheidung von den anderen reziproken Verwandtschaften, z. B. der polaren (§ 18).

durch $\varDelta$ eine Ebene E so, daß sie mit der Achse den aus 2) bestimmten Winkel φ bildet. Dann ist E die zu P zugeordnete Ebene.

Um zu einer gegebenen Ebene E den zugehörigen Punkt P zu finden, ziehe man in E durch den Schnittpunkt Q mit der Achse die zu dieser senkrechte Gerade und trage auf letzterer von Q aus die nach 2) aus dem Winkel φ zwischen Ebene und Achse zu ermittelnde Länge $\varDelta$ auf. Der Endpunkt ist dann der zu E zugeordnete Punkt P*).

Im besonderen ist hiernach einem Punkt der Achse die durch ihn gehende, zur Achse senkrechte Ebene konjugiert. Als Grenzfall ergibt sich hiernach noch, daß der unendlich fernen Ebene entsprechen muß der unendlich ferne Punkt der Achse.

Entsprechende oder konjugierte Gerade des Nullsystems. Das Nullsystem ist ein besonderer Fall der reziproken Verwandtschaft überhaupt. Beschreibt also der Punkt P eine auf einer Geraden l_1 liegende Punktreihe, so muß E ein Ebenenbüschel beschreiben, d. h. sich um eine Gerade l_2 drehen. Diese beiden Geraden l_1 und l_2 entsprechen sich also oder sind zueinander konjugiert.

So hat daher jede Gerade l_1 im Raum ihre konjugierte Gerade l_2, die durch l_1 bestimmt ist und deren Koordinaten also durch diejenigen von l_1 ausdrückbar sein müssen. Man findet diese Ausdrücke ohne Mühe auf folgendem Wege:

Es seien P_1 (x_1, y_1, z_1) und P_2 (x_2, y_2, z_2) irgend zwei Punkte im Raume und E_1 (u_1, v_1, w_1), E_2 (u_2, v_2, w_2) die ihnen entsprechenden Ebenen, so daß nach 5):

$$u_1 = -\frac{1}{x_1}, \quad v_1 = -\frac{z_1}{kx_1}, \quad w_1 = +\frac{y_1}{kx_1},$$
$$u_2 = -\frac{1}{x_2}, \quad v_2 = -\frac{z_2}{kx_2}, \quad w_2 = +\frac{y_2}{kx_2}.$$

P_1 und P_2 liegen auf einer Gerade l_1, der die Schnittlinie l_2 von E_1 und E_2 entspricht. Die Koordinaten X_1, Y_1, Z_1, $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{N}_1$ von l_1 folgen daher nach 1) und 4), § 10, die Koordinaten: X_2, Y_2, Z_2, $\boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{N}_2$ von l_2 aber nach 11), § 10.

*) Die in diesen Angaben noch liegende Zweideutigkeit der Konstruktion ist nach den Bemerkungen auf S. 117 zu heben.

Setzt man in letztere dann die Formeln 4) ein und multipliziert darauf, da es ja doch nur auf die Verhältnisse ankommt, mit dem gemeinsamen Nenner $k x_1 x_2$, so wird zuletzt sehr einfach:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{1}{k} L_1, \quad Y_2 = Y_1, \quad Z_2 = Z_1, \\ L_2 &= k X_1, \quad M_2 = M_1, \quad N_2 = N_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Gleichungen geben zu jeder Geraden l_1 die zugehörige Gerade l_2, die im allgemeinen zu l_1 windschief ist. Denn setzt man nach 14a), § 10 die Bedingung des Schneidens an, so folgt nach 7):

$$k X_1^2 + \frac{1}{k} L_1^2 + 2 Y_1 M_1 + 2 Z_1 N_1 = 0,$$

oder wenn die Identität 6), § 10 benutzt wird:

$$k X_1^2 - 2 X_1 L_1 + \frac{1}{k} L_1^2 = 0,$$

d. h. $$(k X_1 - L_1)^2 = 0, \quad L_1 = k X_1.$$

Dann aber ist l_1 ein Strahl des Komplexes. Doch auch für einen solchen findet kein Schneiden, sondern ein Zusammenfallen statt. Denn die Bedingung $L_1 = k X_1$ verwandelt die erste und vierte der Gleichungen 7) in: $X_2 = X_1$, $L_2 = L_1$, und da die vier übrigen Koordinaten von l_1 und l_2 sowieso übereinstimmen, so muß in der Tat l_2 mit l_1 identisch sein. Also:

Ein Strahl des Komplexes ist sich selbst konjugiert. Und umgekehrt: Ist eine Gerade sich selbst konjugiert, so ist sie ein Strahl des Komplexes.

Dieser Sachverhalt ist auch geometrisch sehr leicht zu erklären. Denn wenn man einen Punkt auf einem Strahl l des Komplexes laufen läßt, so muß die konjugierte Ebene nach der Definition stets durch l hindurchgehen.

Zwei konjugierte, aber nicht zusammenfallende Gerade l_1 und l_2 haben eine sehr innige Beziehung zu dem Komplex, die sich sofort bei Hinzuziehung irgend einer dritten Geraden l, welche beide schneidet, herausstellt. Denn aus den Bedingungen:

$$\begin{aligned} X L_1 + L X_1 + Y M_1 + M Y_1 + Z N_1 + N Z_1 &= 0, \\ X L_2 + L X_2 + Y M_2 + M Y_2 + Z N_2 + N Z_2 &= 0 \end{aligned}$$

folgt nach 7) sofort durch Subtraktion:

$$X (L_2 - L_1) + L (X_2 - X_1) = 0,$$

oder, wenn auch noch N_2 und L_2 aus 7) eingesetzt werden:

$$(L - kN) \cdot (L_1 - kN_1) = 0,$$

d. h. entweder ist l_1 ein Strahl des Komplexes (was ausgeschlossen wurde), oder l ist ein solcher. Also:

Jede Gerade l, welche irgend zwei konjugierte und nicht zusammenfallende Gerade l_1 und l_2 schneidet, ist ein Strahl des Komplexes.

Das umgekehrte Beweisverfahren ergibt die folgende Umkehrung:

Schneidet ein Strahl l des Komplexes eine Gerade l_1, so schneidet er auch die konjugierte Gerade l_2.

Läßt man z. B. l_1 mit der Achse zusammenfallen, so ist:

$$Y_1 = Z_1 = L_1 = M_1 = N_1 = 0$$

und aus 7) folgt dann:

$$Y_2 = Z_2 = X_2 = M_2 = N_2 = 0,$$

d. h. l_2 fällt mit der unendlich fernen, zu l_1 senkrechten Geraden zusammen*). Folglich muß jede Gerade, welche die Achse senkrecht schneidet, ein Strahl des Komplexes sein, wie in diesem besonderen Falle schon früher erwiesen wurde.

Ferner folgt auch, daß jede Parallele zu l_2, welche l_1 schneidet, und jede Parallele zu l_1, welche l_2 schneidet, dem Komplex angehört. Verbindet man aber endlich die beiden unendlich fernen Punkte von l_1 und l_2, so entsteht ein unendlich ferner Strahl des Komplexes, der also durch den konjugierten Punkt der unendlich fernen Ebene, d. h. durch den unendlich fernen Punkt der Achse gehen muß. Oder mit anderen Worten:

Die Richtung der Achse und die Richtungen zweier konjugierter Geraden sind parallel zu ein und derselben Ebene. Oder auch: Es gibt eine vierte Richtung, welche auf allen dreien senkrecht steht.

Diese Sätze ermöglichen die geometrische Konstruktion der konjugierten Geraden l_2 zu einer beliebig gegebenen Geraden l_1. Man suche diejenige Gerade l auf, welche l_1 und die Achse senkrecht schneidet. Es seien P_1 und Q die beiden Schnitt-

*) Die Achse eines linearen Strahlenkomplexes kann also auch definiert werden als diejenige Gerade im Raum, welcher im zugehörigen Nullsystem eine unendlich ferne und zu ihr senkrechte Gerade konjugiert ist.

punkte (P_1 und l_1, Q auf der Achse), also $QP_1 = \varDelta_1$ der kürzeste Abstand. Da l ein Strahl des Komplexes ist, welcher l_1 schneidet, so muß auch die zu suchende Konjugierte l_2 von l geschnitten werden. Der Schnittpunkt sei P_2. Nun aber steht l senkrecht auf der Achse und auf l_1, also auch senkrecht auf l_2, d. h. l schneidet sowohl die Achse, als auch l_1, als auch l_2 senkrecht.

Außer $QP_1 = \varDelta_1$ werde noch die Neigung φ_1 von l_1 gegen die Achse eingeführt. Es sind dann noch $QP_2 = \varDelta_2$ und die Neigung φ_2 von l_2 gegen die Achse zu finden. Hierzu denke man sich durch P_1 die Parallele zu l_2, durch P_2 die Parallele zu l_1, so daß der ersteren die Bestimmungsstücke $\varDelta_1$ und φ_2, der zweiten aber $\varDelta_2$ und φ_1 zukommen. Diese Parallelen sind aber auch Strahlen des Komplexes, also nach 4):

$$\varDelta_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \varDelta_2 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = k. \tag{8}$$

Damit sind $\varDelta_2$ und φ_2 gegeben und die Ermittelung der Lage von l_2 ist beendet. Ist z. B. $\varphi_1 = 0$, so wird $\varDelta_2 = \infty$, d. h. l_2 liegt unendlich fern oder: den Parallelen zur Achse entsprechen unendlich ferne Linien. Ist $\varDelta_1 = 0$, so wird $\operatorname{tg} \varphi_2 = \infty$, d. h. wenn l_1 die Achse schneidet, so steht l_2 auf ihr senkrecht. Ist aber $\varDelta_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = k$, so folgt nach 8) $\varDelta_2 = \varDelta_1$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1$, d. h. l_2 fällt mit l_1 zusammen, wie es sein muß, da dann l_1 nach 4) ein Strahl des Komplexes wird.

Die in 8) noch enthaltene Zweideutigkeit der Konstruktion von l_2 wird wie bei den früheren Konstruktionen der Komplexstrahlen gehoben. Man findet, daß l_1 und l_2 entweder beide linksgängig oder beide rechtsgängig zur Achse sind und daß, wenn k positiv, im ersteren Falle P_1 und P_2 auf derselben Seite von Q, im zweiten auf verschiedenen Seiten von Q liegen; wenn k aber negativ, so umgekehrt im ersteren Falle auf derselben, im zweiten auf verschiedenen Seiten von Q liegen.

Nullsysteme und Kraftsysteme. Dieser kurze Abriß einer analytisch geometrischen Theorie der linearen Strahlenkomplexe und der mit ihnen verbundenen Nullsysteme ist noch durch Aufdeckung des innigen Zusammenhanges mit der für die Mechanik so wichtigen Theorie der Kraftsysteme ab-

zuschließen. Hierzu bedarf es nur kleiner Umformungen der Formeln 7), deren erste in dem erlaubten Wechsel des Vorzeichens in den sechs Koordinaten von l_2 besteht, worauf diese Formeln lauten:

$$-X_2 = \frac{1}{k} L_1, \quad Y_2 + Y_1 = Z_2 + Z_1 = M_2 + M_1 = N_2 + N_1 = 0,$$
$$-L_2 = k X_1.$$

Die erste und letzte Gleichung können auch so geschrieben werden:

$$X_1 + X_2 = -\frac{1}{k}(L_1 - k X_1), \quad L_2 + L_1 = (L_1 - k X_1).$$

Der hier auf der rechten Seite auftretenden Größe $L_1 - k X_1$ kann man, wenn sie nicht $= 0$, also l_1 kein Strahl des Komplexes ist, jeden beliebig angenommenen Wert geben, weil es erlaubt ist, die Koordinaten von l_1 oder l_2 mit derselben Zahl zu multiplizieren. Setzt man also zur Abkürzung:

$$L_1 - k X_1 = L, \quad -\frac{1}{k}(L_1 - k X_1) = X, \tag{9}$$

so werden dann die Formeln 7):

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= X, \quad Y_1 + Y_2 = 0, \quad Z_1 + Z_2 = 0, \\ L_1 + L_2 &= L, \quad M_1 + M_2 = 0, \quad N_1 + N_2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Bekanntlich kann man irgend ein System von Kräften, die an einem „starren" Körper angreifen, immer ersetzen durch eine Einzelkraft X und ein Kräftepaar L, dessen Pfeil die Richtung der Kraftlinie X (oder die entgegengesetzte Richtung) hat. Macht man diese Kraftlinie zur x-Achse, so sagen die Gleichungen 10) aus, daß ein solches Kraftsystem auch ersetzt werden kann durch zwei Einzelkräfte, deren Kraftlinien l_1 und l_2 zueinander windschief sind. Dabei kann die eine Linie l_1 willkürlich angenommen werden, worauf die andere l_2 zur Konjugierten von l_1 in demjenigen Nullsystem wird, dessen Achse mit der Kraftlinie von X zusammenfällt und dessen Konstante k nach 9) durch die Formel:

$$k = -\frac{L}{X}$$

aus dem Verhältnis von $L : X$ zu bestimmen ist. Nur darf l_1 kein Strahl des zugehörigen Komplexes sein, weil dann l_1 und l_2 zusammenfallen und die beiden Kräfte unendlich

groß und entgegengesetzt gerichtet sein würden. Denn da für einen solchen Strahl $L_1 - k X_1 = 0$, so gehört ein unendlich großer Faktor dazu, um die Gleichungen 9) zu erfüllen.

Umgekehrt kann man zwei gegebene Kräfte K_1 und K_2, die in irgend zwei zueinander windschiefen Geraden l_1 und l_2 liegen und an einem „starren" Körper angreifen, auf sehr einfache Weise recht willkürlich durch zwei andere Kräfte K'_1 und K'_2 ersetzen. Man schneide nämlich l_1 und l_2 durch dieselbe Gerade l in P_1 und P_2, nehme auf l irgend zwei gleich große entgegengesetzt gerichtete, also sich aufhebende Kräfte p_1 und p_2 an und setze K_1 und p_1 zu einer Resultante K'_1, K_2 und p_2 zu einer Resultante K'_2 zusammen. Dann sind in der Tat K'_1 und K'_2 zu K_1 und K_2 äquivalent.

Es seien l'_1 und l'_2 die neuen Kraftlinien. Nach der Konstruktion schneiden sich l'_1 und l_1 und ebenso l'_2 und l_2 und man erkennt leicht, daß man für l'_1 irgend eine Gerade nehmen kann, welche l_1, nicht aber l_2 schneidet. Denn mit l'_1 ist zunächst P_1 als Schnittpunkt von l'_1 und l_1 bestimmt. Die Gerade l geht auch durch P_1 und liegt in der Ebene durch l_1 und l'_1. Letztere schneidet l_2 in einem Punkte, der mit Punkt P_2 übereinstimmen muß. Also ist auch l bekannt und man hat nur noch die beiden gleichen Kräfte p_1 und p_2 so zu wählen, daß die Resultante von K_1 und p_1 in die Linie l'_1 hineinfällt.

Soll aber l_1 durch irgend eine Gerade l''_1 ersetzt werden, die zu l_1 windschief ist, so ziehe man eine beliebige, l_1 und l''_1 schneidende Gerade, betrachte sie als l'_1 und gehe, wie eben auseinandergesetzt, von l_1 auf l'_1 und ebenso von l'_1 auf l''_1 über. Dann wird l_2 erst durch eine andere Gerade l'_2 und dann durch die zu l''_1 konjugierte Gerade l''_2 ersetzt.

So ist also das Nullsystem mit seinen konjugierten Geraden wirklich nichts anderes als irgend ein Kraftsystem, sofern man dasselbe auf alle mögliche Arten durch zwei Einzelkräfte zu ersetzen sucht. Noch sei die Bemerkung daran geknüpft, daß, wenn die eine Kraftlinie l_1 parallel zur Achse des Nullsystems genommen wird, so die andere l_2 unendlich fern liegt, d. h. daß die zweite Kraft zum Kräftepaar wird. Läßt man aber l_1 mit der Achse selbst zusammenfallen, dann ist der Pfeil des Kräftepaares

mit l_1 gleich gerichtet und man kommt wieder auf die allgemein übliche Darstellung eines Kraftsystems durch eine Einzelkraft und ein solches Kräftepaar zurück.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben zwei Gerade l_1 und l_2, eine jede durch ihre sechs Plückerschen Koordinaten. Es ist das Kriterium dafür aufzustellen, ob sie zueinander links- oder rechtsgängig sind. Wie groß ist die Konstante des Komplexes, in dem l_1 die Achse und l_2 irgend ein Strahl sein soll?

2. Aus der Theorie der Nullsysteme die Existenz solcher Tetraeder zu beweisen, die zugleich ein- und umbeschrieben sind (so daß die Ecken des einen auf den Flächen [unbegrenzt erweitert gedacht] des anderen und umgekehrt liegen). Im besonderen sind zwei gleichgroße reguläre Tetraeder in eine solche Lage zu bringen.

3. Gegeben zwei Punkte P_1 und P_2. Gesucht die Gleichung für den Komplex aller Geraden l derart, daß die beiden Ebenen, die eine durch l und P_1, die andere durch l und P_2 aufeinander senkrecht stehen.

---

§ 12.

Zwei Komplexe. Ihre gemeinsamen Strahlen. Drei Komplexe. Regelflächen. Vier Komplexe.

Zwei Komplexe. Werden zwischen den Koordinaten einer Geraden l zwei Gleichungen:

$$F_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0, \quad F_2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = 0 \qquad 1)$$

angesetzt, zu denen noch die Identität:

$$\boldsymbol{X}\boldsymbol{L} + \boldsymbol{Y}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{N} = 0 \qquad 2)$$

hinzutritt, so wird im allgemeinen eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden bestimmt, wie umgekehrt jede solche zweifach unendliche Mannigfaltigkeit zu ihrer analytischen Darstellung zweier Gleichungen von der Form 1) bedarf. Solche Mannigfaltigkeiten sind z. B. sämtliche Normalen einer beliebigen krummen Fläche, d. h. sämtliche Geraden, welche in den Punkten der Fläche auf den zugehörigen Berührungsebenen senkrecht stehen. Diese Gesamtheit von Normalen hat außerordentlich merkwürdige Eigenschaften, wie z. B., daß alle zu einer gegebenen Normalen unendlich benachbarten Normalen, also ein sogenanntes unendlich dünnes Bündel von Normalen zwei ganz bestimmte, zueinander windschiefe und senkrechte Geraden, die sogenannten „Krümmungsachsen" schneidet (vgl. hierzu die nachfolgenden Betrachtungen), und

daß umgekehrt jede Gesamtheit von Geraden, welche diese Eigenschaft besitzt, mit der Gesamtheit aller Normalen an eine im gegebenen Fall vielleicht erst noch zu bestimmende Fläche übereinstimmt.

Diese wenigen allgemeinen Bemerkungen mögen noch durch kurzes Eingehen auf den einfachsten Fall erläutert werden, daß die beiden Gleichungen 1) linear, also von der Form sind:

$$F_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 L + e_1 M + f_1 N = 0, \qquad 3)$$

$$F_2 = a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2 L + e_2 M + f_2 N = 0, \qquad 4)$$

wo die zwölf Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2, ... als beliebig gegeben vorausgesetzt werden.

Es handelt sich dann also um die gemeinsamen Strahlen irgend zweier linearer Komplexe. Da ist zunächst zu bemerken, daß durch lineare Verbindung der beiden Gleichungen zu der neuen Gleichung:

$$F = F_1 + \lambda F_2 = 0 \qquad 5)$$

ein ganzes „Büschel" von Komplexen gebildet wird, und daß selbstverständlich jeder gemeinsame Strahl der beiden gegebenen Komplexe zugleich ein Strahl in jedem anderen Komplex dieses Büschels sein muß.

Unter diesen unendlich vielen Komplexen gibt es im allgemeinen zwei, welche ausarten, d. h. aus allen Geraden bestehen, welche ein und dieselbe Gerade schneiden. Denn die notwendige Bedingung verwandelt sich nach 3), § 11 in die quadratische Gleichung für λ:

$$\begin{gathered}(a_1 + \lambda a_2)(d_1 + \lambda d_2) + (b_1 + \lambda b_2)(e_1 + \lambda e_2) \\ + (c_1 + \lambda c_1)(f_1 + \lambda f_2) = 0,\end{gathered} \qquad 6)$$

deren beiden Wurzeln jene beiden Komplexe entsprechen.

Sind sie reell und verschieden, so gibt es also zwei Gerade l_1 und l_2, welche von allen gemeinsamen Strahlen geschnitten werden müssen. Da nun die beiden gegebenen Komplexe durch irgend zwei andere des Büschels, also auch die beiden eben genannten ersetzt werden können, so ist auch umgekehrt die Gesamtheit aller Strahlen identisch mit der Gesamtheit aller Geraden, welche sowohl l_1 wie l_2 schneiden. Wenn aber die beiden Wurzeln einander gleich sind, l_1 und l_2

also zusammenfallen, oder wenn sie imaginär sind, so fällt diese überraschend einfache Konstruktion fort. Sie muß dann durch andere Konstruktionen ersetzt werden, wie etwa folgendermaßen:

Die sämtlichen Strahlen eines linearen Komplexes, welche durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehen, liegen nach dem vorigen Paragraphen in einer Ebene E. Dies gilt für jeden der beiden gegebenen Komplexe. Die Schnittlinie der beiden zugehörigen Ebenen ist also der durch P gehende gemeinsame Strahl der Komplexe. Daher:

Durch jeden Punkt P des Raumes geht im allgemeinen nur ein gemeinsamer Strahl.

Ebenso folgt:

In jeder Ebene E des Raumes liegt im allgemeinen nur ein gemeinsamer Strahl.

(Ausgenommen sind die Punkte, welche auf den vorher genannten Linien l_1 und l_2 liegen und die Ebenen, welche durch l_1 und l_2 hindurchgehen. Denn liegt z. B. P auf l_1, so fallen die beiden P zugehörigen Ebenen zusammen, da sie beide durch l_2 gehen. Durch P gehen also dann unzählig viele gemeinsame Strahlen, die zusammen ein l_2 schneidendes Strahlenbüschel bilden.)

Besonders einfach liegt aber die Sache, wenn die quadratische Gleichung 6) für λ zur Identität wird, wenn also alle Komplexe des Büschels ausarten. Es ist hierzu notwendig, daß nicht allein jeder der beiden gegebenen Komplexe 3) und 4) ausarte, sondern auch, daß die Geraden l_1 und l_2, die geschnitten werden sollen, sich selbst schneiden [vgl. 14a), § 10, S. 107]. Dann bestimmen l_1 und l_2 ein Strahlenbüschel und jeder Komplex des Komplexbüschels besteht aus allen Geraden, welche einen und denselben Strahl dieses Strahlenbüschels schneiden [vgl. 15), § 10, S. 108].

Merkwürdigerweise spaltet sich dann die Gesamtheit aller gemeinsamen Strahlen in zwei nur durch das Strahlenbüschel zusammenhängende, sonst aber ganz getrennte Gebiete. Denn wenn eine Gerade l zwei sich schneidende Gerade l_1 und l_2 schneiden soll, so muß sie entweder in der durch l_1 und l_2 gehenden Ebene E liegen, oder durch ihren Schnittpunkt P gehen. Es liegt also eine Spaltung vor, in solche Gerade, die in E liegen und in solche, die durch P gehen.

Analytisch erklärt sich diese Eigentümlichkeit so, daß im vorliegenden Falle aus der Identität 2) vermittelst 3) und 4) eine zerfallende Gleichung zweiten Grades abgeleitet werden kann. Je nachdem man nun den einen oder den anderen Faktor = 0 setzt, erhält man den einen oder den anderen Teil der gemeinsamen Strahlen.

Zur Erläuterung diene der einfache Fall, daß sich die Gleichungen 3) und 4) auf:

$$M = 0, \quad N = 0$$

reduzieren. Die erste Gleichung verlangt dann, daß l die y-Achse, die zweite, daß l die z-Achse schneiden solle. In der Tat folgt durch Einsetzen in 2) sofort:

$$X \cdot L = 0.$$

Es ist also entweder:

$$M = 0, \quad N = 0, \quad X = 0$$

oder:

$$M = 0, \quad N = 0, \quad L = 0,$$

d. h. entweder liegt l in der yz-Ebene, oder l geht durch den Anfangspunkt O.

Drei Komplexe. Regelflächen. Werden drei Komplexe durch ihre Gleichungen:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0 \tag{7}$$

gegeben, so bilden ihre gemeinsamen Strahlen im allgemeinen nur noch eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, so daß man sie aneinanderreihen kann, etwa so, wie die Punkte einer Kurve.

Denn da die Identität:

$$XL + YM + ZN = 0 \tag{8}$$

hinzutritt und sämtliche Gleichungen homogen sein müssen, so sind eigentlich nur fünf Veränderliche, z. B.:

$$\frac{Y}{X}, \quad \frac{Z}{X}, \quad \frac{L}{X}, \quad \frac{M}{X}, \quad \frac{N}{X}$$

und vier Gleichungen vorhanden. Es kann also eine Veränderliche, etwa $\frac{Y}{X}$ beliebig angenommen werden, worauf die anderen durch die Gleichungen 7) und 8) zu ermitteln sind.

Da nun aber auf jeder Geraden einfach unendlich viele Punkte liegen, so ist die Gesamtheit aller Punkte auf allen gemeinsamen Strahlen der drei Komplexe doppelt unendlich, d. h. diese Strahlen bilden zusammen eine Fläche, wie sie ganz allgemein durch eine im Raum sich bewegende Gerade beschrieben wird.

Eine solche Fläche nennt man Regelfläche. Zur Auffindung ihrer Gleichung kann man die Formeln:

$$\boldsymbol{Z} y - \boldsymbol{Y} z = \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{X} z - \boldsymbol{Z} x = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{Y} x - \boldsymbol{X} y = \boldsymbol{N} \qquad \textbf{9)}$$

hinzuziehen, welche die analytische Bedingung dafür darstellen, daß der Punkt $P(x, y, z)$ auf l liege. Da aus ihnen die Identität 8) unmittelbar folgt, so kann letztere als überflüssig ausgeschaltet werden. Es bleiben dann noch die sechs Gleichungen 7) und 9). Eliminiert man aus ihnen die Verhältnisse:

$$\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{Z} : \boldsymbol{L} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{N}$$

[es wird sich meist empfehlen, aus 9) $\boldsymbol{L M N}$ in 7) einzusetzen und dann $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{Z}$ zu eliminieren], so bleibt die Endgleichung für $P(x, y, z)$, d. h. die Gleichung der Regelfläche übrig.

Als Beispiel hierzu diene folgende Aufgabe:

Eine Gerade l bewege sich so, daß sie beständig an drei beliebig im Raume gelegenen Geraden l_1, l_2, l_3 entlang gleitet. Welche Regelfläche beschreibt sie dabei? [Siehe Aufgabe c), § 4, S. 46.]

Hier sind drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} F_1 &\equiv \boldsymbol{X L}_1 + \boldsymbol{Y M}_1 + \boldsymbol{Z N}_1 + \boldsymbol{L X}_1 + \boldsymbol{M Y}_1 + \boldsymbol{N Z}_1 = 0, \\ F_2 &\equiv \boldsymbol{X L}_2 + \boldsymbol{Y M}_2 + \boldsymbol{Z N}_2 + \boldsymbol{L X}_2 + \boldsymbol{M Y}_2 + \boldsymbol{N Z}_2 = 0, \\ F_3 &\equiv \boldsymbol{X L}_3 + \boldsymbol{Y M}_3 + \boldsymbol{Z N}_3 + \boldsymbol{L X}_3 + \boldsymbol{M Y}_3 + \boldsymbol{N Z}_3 = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{10)}$$

zu erfüllen. Die erste nimmt nach Einführung von 9) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{L}_1 + z \boldsymbol{Y}_1 - y \boldsymbol{Z}_1) + \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{M}_1 + x \boldsymbol{Z}_1 - z \boldsymbol{X}_1) \\ + \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{N}_1 + y \boldsymbol{X}_1 - x \boldsymbol{Y}_1) = 0. \end{aligned}$$

Formt man ebenso die beiden anderen um und eliminiert dann $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{Y} : \boldsymbol{Z}$, so wird die Endgleichung durch das Nullsetzen einer Determinante gebildet, deren erste Horizontalreihe die Elemente:

$$\boldsymbol{L}_1 + z \boldsymbol{Y}_1 - y \boldsymbol{Z}_1; \quad \boldsymbol{M}_1 + x \boldsymbol{Z}_1 - z \boldsymbol{X}_1; \quad \boldsymbol{N}_1 + y \boldsymbol{X}_1 - x \boldsymbol{Y}_1$$

hat, während die anderen aus ihr durch Vertauschung des Index 1 mit 2 bzw. 3 hervorgehen. Da jedes Element der Determinante in bezug auf die Koordinaten $x\,y\,z$ des laufenden Punktes vom ersten Grade ist, so scheint es fast, als ob die Regelfläche hier von der dritten Ordnung wäre. Man erkennt aber bald, daß die Glieder dritten Grades sich gegenseitig aufheben, wie es auch in jenem besonderen Fall der vorliegenden Aufgabe war (S. 46 ff.). Die Regelfläche ist also eine Fläche zweiter Ordnung.

Um aber unmittelbar den zweiten Grad zu erkennen, muß man etwas anders, etwa folgendermaßen vorgehen: Man nehme einen zunächst beliebigen Punkt $P(x, y, z)$ im Raume an und bestimme nach Aufgabe IV), § 9, S. 92 die Koordinaten der Ebenen durch P und l_1 und durch P und l_2. Sie sind in bezug auf x, y, z linear. Diese beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden l, die durch P hindurchgeht und l_1, sowie l_2 trifft. Die Koordinaten von l werden daher nach den Formeln 11), § 10 Ausdrücke zweiten Grades in x, y, z. Soll aber l noch die dritte Gerade l_3 schneiden, so sind diese Ausdrücke in die dritte der drei gegebenen Gleichungen 10) einzusetzen, worauf in der Tat eine Gleichung zweiten Grades für P entsteht. Daher:

Bewegt sich eine Gerade l so, daß sie an irgend drei gegebenen Geraden l_1, l_2, l_3 entlang gleitet, so beschreibt sie eine Fläche zweiter Ordnung.

Wie sich später zeigen wird, ist die Fläche im allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid (vgl. § 14). Sind l_1, l_2 und l_3 parallel zu einer Ebene, so entsteht im besonderen ein hyperbolisches Paraboloid. Schneiden sich aber zwei von ihnen, etwa l_1 und l_2, so liegt auf der Hand, daß eine Gerade l, welche l_1, l_2 und l_3 schneiden soll, entweder durch den Schnittpunkt P von l_1 und l_2 gehen und in der Ebene durch P und l_3 liegen, oder in der Ebene E durch l_1 und l_2 liegen und durch den Schnittpunkt von E mit l_3 gehen muß. Die Geraden l bilden also zwei Strahlenbüschel und die Fläche zerfällt in die beiden Ebenen derselben.

Die drei ursprünglich gegebenen Geraden l_1, l_2, l_3 liegen selbstverständlich auch auf der Regelfläche, gehören aber natürlich nicht zu der Schar von Geraden l, welche l_1, l_2 und l_3 schneiden. Doch sind l_1, l_2, l_3 durchaus nicht vereinzelt,

sondern gehören einer anderen Schar von Geraden der Fläche an, deren Existenz auf folgende einfache Weise nachweisbar ist:

Man bilde aus 10) durch lineare Verbindung die neue Gleichung:

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 = 0, \qquad 11)$$

die dann auch für alle Geraden der Schar l erfüllt werden muß. Sie ist linear, wie die gegebenen, also von der Form:

$$XL' + YM' + ZN' + LX' + MY' + NZ' = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\begin{aligned} \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 &= X', \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 &= Y' \text{ usw.} \end{aligned} \qquad 12)$$

Bestimmt man λ_1, λ_2, λ_3 so, daß auch X', Y'... Koordinaten einer Geraden l' werden, setzt also die Bedingung:

$$X'L' + Y'M' + Z'N' = 0,$$

so entsteht nach Einsetzen von 12) eine quadratische Gleichung für λ_1, λ_2, λ_3, die sich übrigens auf die Form:

$$A\lambda_1\lambda_2 + B\lambda_2\lambda_3 + C\lambda_3\lambda_1 = 0$$

reduzieren muß, weil man für $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ auf die Linie l_1 usw. zurückkommt. Man kann daher $\lambda_2 : \lambda_1$ beliebig annehmen, worauf $\lambda_3 : \lambda_1$ eindeutig bestimmt ist. Daher:

Wenn eine Schar von Geraden l drei gegebene Gerade l_1, l_2, l_3 schneidet, so schneidet sie zugleich jede Gerade einer zweiten Schar l'. Die gegebenen Geraden l_1, l_2, l_3 gehören zu der letzteren, können aber durch irgend drei andere Gerade dieser Schar l' ersetzt werden. Die beiden Scharen l und l' liegen auf derselben Fläche zweiter Ordnung, sind aber durchaus voneinander verschieden. Durch jeden Punkt der Fläche geht eine Gerade l und eine Gerade l'. Sie ist also auf doppelte Art eine Regelfläche.

Ausführlichere Untersuchungen über diese beiden merkwürdigen Scharen sind einem späteren Abschnitt vorbehalten (§ 19).

Die Regelflächen. Wenn man von den Ebenen absieht, welche eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden enthalten und also auf unendlich verschiedene Weise als Regelfläche betrachtet werden können, wenn man ferner absieht von den Regelflächen zweiter Ordnung, bei denen dies, wie eben gezeigt, auf zwei Arten möglich ist, so wird im allgemeinen

eine Fläche, wenn sie überhaupt eine Regelfläche ist, eine solche nur auf eine Weise sein können.

Eine Regelfläche ist wie jede andere Fläche als geometrischer Ort ihrer Punkte ein zweidimensionales Gebilde; in bezug auf die Schar der Geraden, durch deren Bewegung sie erzeugt werden kann und die man deshalb auch „Erzeugende" nennt, erscheint sie aber als eine einfache und stetige Folge derselben. Es sei P irgend ein Punkt der Fläche und l die durch ihn hindurchgehende Erzeugende. Da die Tangentialebene in P an die Regelfläche alle Nachbarpunkte enthält, so geht sie auch durch die benachbarten Punkte von l, mithin enthält sie l ganz und gar. Also:

Bewegt sich ein Punkt P auf einer Erzeugenden l, so dreht sich die Tangentialebene E um l, beschreibt daher ein Ebenenbüschel mit der Achse l*).

Die Ebene E ist Tangentialebene im allgemeinen nur für den Punkt P. Im übrigen aber schneidet sie in die Fläche längs der Linie l hinein. Ist die Regelfläche insbesondere von der zweiten Ordnung, d. h. ist sie, wie vorhin gezeigt, im zweifachen Sinne Regelfläche, so fällt die Tangentialebene in P mit der Ebene der beiden durch ihn hindurchgehenden Geraden zusammen.

Abwickelbare Flächen. Der eben angeführte Satz erleidet eine sehr wichtige Ausnahme für den Fall, daß die Regelfläche, wie man sagt, „abwickelbar" ist. Um die Struktur dieser Art von Flächen zu durchschauen, nehme man zunächst an, daß eine Gerade l sich um einen Punkt P in einer beliebigen Ebene E drehe (Fig. 15), aber nicht ganz herum, sondern nur so, daß nur ein Teil des Strahlenbüschels,

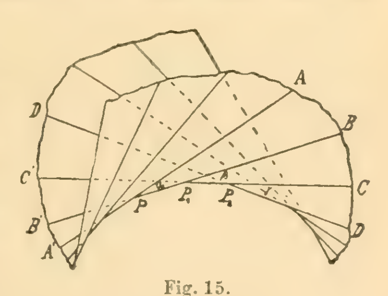


Fig. 15.

nämlich der Winkel $APB = \alpha$ und sein Nebenwinkel beschrieben wird. Nachdem l die Lage $B'PB$ erlangt, möge Drehung um einen anderen Punkt P_1 und in einer anderen

*) Die Punktreihe P und das Ebenenbüschel E werden projektivisch aufeinander bezogen, wenn man jedem Punkte P die ihm zugehörende Tangentialebene E zuordnet.

Ebene E_1 vor sich gehen, wobei ein neuer Winkel $BP_1C = \beta$ und sein Nebenwinkel beschrieben wird. Darauf folge eine dritte Drehung um den Punkt P_2 in der Ebene E_2 usw. Auch kann selbstverständlich diese Bewegung nach rückwärts über Punkt P hinaus beliebig fortgesetzt werden. Die Winkel α, β, $\gamma \ldots$ bzw. ihre Nebenwinkel bilden dann in ihrer Gesamtheit eine Regelfläche, die natürlich durch bloße Biegung um die Schenkel AA', BB' usw. in eine einzige Ebene abwickelbar ist.

Jetzt gehe man durch die Annahme zur Grenze über, daß sich die Punkte P, P_1, $P_2 \ldots$ einander unendlich nähern und benachbarte Punkte einer beliebigen Raumkurve werden (man denke etwa an eine Schraubenlinie). Dann nähern sich die Linien PA, P_1B, $P_2C \ldots$ unbegrenzt den Tangenten dieser Raumkurve und die Winkel α, β, $\gamma \ldots$ werden die unendlich kleinen „Kontingenzwinkel" zwischen benachbarten Tangenten. Die Ebenen E, E_1, $E_2 \ldots$ aber gehen durch zwei benachbarte Tangenten oder drei aufeinanderfolgende Punkte der Kurve. Man nennt sie „Schmiegungsebenen".

Offenbar bilden die Nebenwinkel von α, β, $\gamma \ldots$ nichts anderes als die Fortsetzung der Fläche über die Raumkurve hinaus nach der entgegengesetzten Seite und beide Teile zusammen bilden erst die vollständige Fläche. In diesem Sinne bezeichnet man auch die Raumkurve als Rückkehrkurve der erzeugten „abwickelbaren" Fläche, die eben deswegen abwickelbar heißt, weil sie, wie eben erläutert, durch bloße Biegung um die Erzeugenden in eine Ebene abgewickelt werden kann. Nach dieser Abwickelung ist die Raumkurve zur ebenen Kurve geworden, die beiden Hälften sind zusammengeklappt und bilden den außerhalb der Kurve liegenden, von ihren Tangenten durchzogenen Teil der Ebene, doppelt genommen. Man sieht aber wohl deutlich, daß die Rückkehrkurve — auch vor der Abwickelung — auf der Fläche, selbst nach ihrer Vervollständigung durch die andere Hälfte, eine messerscharfe Kante, einen Grat bildet, und daß daher in den Punkten dieser Kurve von einer eigentlichen Tangentialebene keine Rede sein kann. Also:

Bewegt sich eine Gerade l so, daß sie immer die unmittelbar benachbarte schneidet, so beschreibt sie eine abwickelbare Fläche. Dieselbe ist auch anzusehen als

die Fläche aller Tangenten an die von den genannten Schnittpunkten gebildete Kurve. Diese Tangenten sind die Erzeugenden der Fläche. Bewegt sich ein Punkt der Fläche auf einer Erzeugenden, so fällt die Tangentialebene beständig mit der Schmiegungsebene im Berührungspunkt zusammen, und nur wenn der Punkt sich dem Berührungspunkte P unbegrenzt annähert und durch ihn hindurchgeht, dreht sich die Tangentialebene mit einem Male um 180° und fällt darauf sofort mit ihrer alten Lage zusammen*).

Die Schmiegungsebene in einem Punkte P der Raumkurve geht sozusagen durch drei benachbarte Punkte und „schmiegt" sich daher der Kurve in P inniger an, als jede andere durch P gehende Ebene. Sie ist die „augenblickliche" Ebene der Kurve. Um dies klar einzusehen, stelle man sich noch eine zweite durch die Tangente in P gehende Ebene vor, von der man verlangen kann, daß sie noch durch irgend einen anderen Punkt Q der Kurve geht. Diese Ebene berührt die Kurve in P und schneidet sie in Q. Läßt man nun Q dem Punkt P unbegrenzt nähern, so wird sie eben zur Schmiegungsebene, welche daher in P zugleich berührt und schneidet. Die Kurve kommt von einer Seite tangential an die Schmiegungsebene heran und verläßt sie wieder tangential, aber (im allgemeinen) auf der anderen Seite.

Man bemerke übrigens, wie sich hier Punkt und Schmiegungsebene durchaus dual oder reziprok gegenüberstehen und wie dieselbe Kurve einerseits durch Bewegung eines Punktes, andererseits durch Bewegung einer Ebene entstehen kann. Denn im letzteren Falle schneiden sich je zwei unendlich benachbarte Ebenen in einer Geraden, einer Tangente und je drei benachbarte in einem Punkt P der Raumkurve. Diese

---

*) Um sich schnell ein Modell einer abwickelbaren Fläche zu verschaffen, lege man zwei Blatt Schreibpapier übereinander, so daß sie aneinanderhaften, und schneide aus ihnen dieselbe Kurve aus. Dann ritze man auf jedem Blatt zur leichteren Biegung Tangenten ein, aber auf dem einen Blatt nach der einen, auf dem anderen nach der anderen Richtung (vgl. in Fig. 15 die ausgezogenen und punktierten Linien), klebe die Blätter längs der Kurve durch Seidenpapier aneinander und winde und drehe so, daß aus der Kurve eine richtige Raumkurve werde, achte aber darauf, daß nun die beiden Blätter nicht mehr zusammenfallen, sondern zu den beiden sich ergänzenden Hälften der abwickelbaren Fläche werden.

Raumkurve wird von allen Ebenen so eingehüllt, daß sie Schmiegungsebenen werden.

Die auf der Tangente in P senkrechte Ebene E nennt man Normalebene und jede in E durch P gezogene Gerade eine Normale der Kurve. Unter allen diesen Normalen wieder werden zwei besonders bezeichnet, die eine als Hauptnormale und die andere als Binormale. Die erstere liegt in der Schmiegungsebene, die letztere steht auf dieser senkrecht. Für die Schraubenlinie z. B. ist die Hauptnormale identisch mit dem Lot auf die Achse des Schraubenzylinders, während die Binormale in der Berührungsebene dieses Zylinders liegt.

Diese hier kurz vorgetragene Theorie der abwickelbaren Flächen bzw. der Raumkurven, ihrer Tangenten und ihrer Schmiegungsebenen vereinfacht sich in zwei besonderen, einander reziprok gegenüberstehenden Fällen. Es kann die bewegte Gerade in einer Ebene bleiben. Dann wird die Raumkurve zur ebenen Kurve und alle Punkte haben dieselbe Schmiegungsebene, nämlich die Ebene der Kurve. Oder es kann die bewegte Gerade immer durch denselben Punkt gehen. Dann beschreibt sie einen Kegel oder vielmehr einen Doppelkegel, dessen beide Teile den beiden Hälften der allgemeinen Regelfläche entsprechen. Die Schmiegungsebenen werden zu Berührungsebenen des Kegels; aber die Raumkurve selbst schrumpft zu einem Punkt, zur Spitze des Kegels zusammen. Liegt diese gar unendlich fern, so verwandelt sich der Kegel in den „Zylinder“.

Vier Komplexe. Sind vier Gleichungen angesetzt:

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0, \tag{13}$$

zu denen noch, wie immer, die Identität:

$$XL + YM + ZN = 0 \tag{14}$$

tritt, so wird es im allgemeinen nur vereinzelte Gerade geben, welche diese Bedingungen erfüllen, da es sich, wie schon so oft betont, nur um die Verhältnisse der Koordinaten von l handelt. Somit sind fünf Gleichungen mit fünf „Unbekannten“ gegeben, aus denen sich letztere ein- oder mehrdeutig berechnen lassen, wenn nicht die Gleichungen gelegentlich auf eine geringere Anzahl zurückführbar sind.

Wird z. B. nach einer Geraden l gefragt, welche vier beliebig im Raume gegebene Gerade l_1, l_2, l_3, l_4 schneiden soll, so werden die Gleichungen 13) alle vier linear. Da aber die Identität 14) vom zweiten Grade ist, so ersieht man, daß es im allgemeinen zwei solche Gerade gibt (reelle oder imaginäre). Gehören aber die vier Geraden l_1, l_2, l_3, l_4 zu ein und derselben Schar einer Fläche zweiter Ordnung*) (vgl. S. 131 ff.), so sind die vier Gleichungen 13) voneinander abhängig und jede Gerade, welche drei von ihnen schneidet, schneidet auch die vierte. Die Bedingungen 13) werden also von unzählig vielen geraden Linien erfüllt, nämlich von allen Geraden der anderen in der Fläche enthaltenen Schar.

Die letzten vier Paragraphen legen wohl überzeugend dar, daß sich die gerade Linie sehr gut als selbständiges Raumelement behandeln läßt und daß man sogar zuweilen kaum wird umhin können, dies zu erwägen. Freilich wird dabei die Geometrie um eine neue Art von Gebilden, die Strahlenkomplexe, vermehrt, welche, wie schon einmal betont, erhöhte Anforderungen an die Kraft der Raumanschauung stellen; aber die große Bedeutung der geraden Linie auch für die Anwendungen läßt die Einreihung dieser Gebilde in die Elemente der Geometrie als wünschenswert erscheinen.

Übungsaufgaben.

1. Eine Kurve ist durch die beiden Gleichungen gegeben:

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad z = \frac{x^3}{a^2}.$$

Es soll die Bedingung, daß eine Gerade l die Kurve in zwei Punkten schneidet (eine Sekante ist), durch zwei Komplexgleichungen ausgedrückt werden.

2. Indem man in 1) die beiden Punkte zusammenfallen läßt, gehe man zu den Tangenten über. Man schreibe die Bedingungen in Gestalt von drei Komplexgleichungen.

3. Es soll die Gleichung für die abwickelbare Tangentenfläche 2) aufgestellt werden.

4. Es sind Ausdrücke für die Koordinaten der Schmiegungsebene in einem beliebigen Punkt der Kurve 1) zu bilden.

---

*) Man sagt dann, die vier Linien l_1, l_2, l_3, l_4 liegen zueinander hyperboloidisch.

Dritter Abschnitt.

§ 13 bis § 18.

§ 13.

Die Kugel. Punkt und Kugel. Ebene und Kugel. Gerade und Kugel. Allgemeine Betrachtungen über Flächen zweiter Ordnung.

Die Mittelpunktsgleichung der Kugel ist nach 1), § 1:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0. \tag{1}$$

Hat aber der Mittelpunkt der Kugel die Koordinaten a, b, c, so wird ihre Gleichung:

$$U \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0 \tag{2}$$

oder entwickelt:

$$U \equiv x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0, \tag{2a}$$

wo:

$$m = -2a,\ n = -2b,\ p = -2c,\ q = a^2 + b^2 + c^2 - r^2. \tag{3}$$

Umgekehrt stellt jede Gleichung zweiten Grades von der Form 2a) oder auch von der Form:

$$\lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + Mx + Ny + Pz + Q = 0 \tag{4}$$

eine Kugel dar. Denn zunächst kann 4) durch Division mit λ auf 2a) zurückgeführt werden. Darauf geben die Gleichungen 3) durch Umkehrung:

$$a = -\frac{m}{2},\ b = -\frac{n}{2},\ c = -\frac{p}{2},\ r = \sqrt{-q + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \frac{p^2}{4}}, \tag{5}$$

also Mittelpunkt und Radius. Je nachdem nun:

$$-q + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \frac{p^2}{4} \gtreqless 0,$$

ist die durch 2a) gegebene Kugel reell, schrumpft zu einem Punkt zusammen oder ist imaginär.

Kugel und Punkt. Um die Lage irgend eines Punktes $P(\xi, \eta, \zeta)$ zur Kugel zu bestimmen, berechne man seinen Abstand ϱ vom Mittelpunkt $M(a, b, c)$ und bilde $\varrho^2 - r^2 = (\xi - a)^2 + (\eta - b)^2 + (\zeta - c)^2 - r^2 = U(\xi, \eta, \zeta)$.

Daher: Je nachdem:

$$U(\xi, \eta, \zeta) \gtreqless 0,$$

liegt P außerhalb der Kugel, auf ihr oder innerhalb.

Auch beweist man ganz wie in I, § 12 für den Kreis, daß im ersteren Falle $U(\xi, \eta, \zeta) = + l^2 =$ dem positiven Quadrat der von P an die Kugel gezogenen Tangente und im letzteren Falle $= - s^2 =$ dem negativen Quadrat der halben kürzesten durch P gehenden Sehne ist.

Kugel und Ebene. Wenn statt des Punktes eine beliebige Ebene E mit den Koordinaten u, v, w, also mit der Gleichung:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

gegeben ist, so berechne man den Abstand Δ des Mittelpunktes der Kugel von E nach der Formel 7 b), § 7, S. 76:

$$\Delta = \frac{au + bv + cw - 1}{\pm\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}.$$

Je nachdem also:

$$(au + bv + cw + 1)^2 \gtreqless r^2(u^2 + v^2 + w^2),$$

liegt E ganz außerhalb der Kugel, berührt dieselbe oder schneidet sie in einem Kreise.

Im besonderen folgt für den zweiten Fall, den Fall der Berührung, die Gleichung der Kugel in Ebenenkoordinaten:

$$(au + bv + cw + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2 + w^2) = 0. \qquad 6)$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, auch vom zweiten Grade. Die Kugel ist, wie alle anderen Flächen zweiter Ordnung, auch von der zweiten Klasse (§ 7, S. 70).

Kugel und Gerade. Endlich sei noch $l(X, Y, Z, L, M, N)$ irgend eine Gerade im Raum. Ihr Abstand Δ vom Mittelpunkt wird nach 12), § 10 durch die Formel gegeben:

$$\Delta = \frac{\sqrt{(bZ - cY - L)^2 + (cX - aZ - M)^2 + (aY - bX - N)^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Je nachdem nun Δ größer, gleich oder kleiner als r, liegt l ganz außerhalb der Kugel, berührt sie, oder schneidet sie in zwei Punkten. Für den Fall der Berührung erhält man nach Fortschaffen von Wurzel und Nenner:

$$\begin{aligned}&(bZ - cY - L)^2 + (cX - aZ - M)^2\\ &+ (aY - Xb - N)^2 - r^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,\end{aligned} \tag{7}$$

also auch eine Gleichung zweiten Grades in Plückerschen Koordinaten, die von sämtlichen Tangenten der Kugel erfüllt wird. (Siehe § 10.)

Die allgemeinste Fläche zweiter Ordnung. Stellt man der Gleichung der Kugel in ihrer allgemeinsten Form 4) die allgemeinste Gleichung zweiten Grades überhaupt gegenüber, nämlich:

$$\begin{aligned}&a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\,a_{23}yz + 2\,a_{31}zx\\ &+ 2\,a_{12}xy + 2\,a_{14}x + 2\,a_{24}y + 2\,a_{34}z + a_{44} = 0,\end{aligned} \tag{8}$$

wo die zehn Koeffizienten a_{11} bis a_{44}, deren Unterscheidung durch Indices nach I), § 17 zu gelten ist, irgendwelche Werte haben sollen, so ersieht man, daß die Kugel doch nur eine sehr spezielle Fläche zweiter Ordnung ist. Denn in der Form 4) fehlen die Produktglieder, d. h. es ist:

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0.$$

Dann aber sind außerdem noch die Koeffizienten der quadratischen Glieder einander gleich:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}.$$

Dies sind die sogenannten „Kriterien“ der Kugelgleichung. Sieht man aber von ihnen ab und nimmt 8) ohne jede Einschränkung hinsichtlich der Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{44}$ (außer daß sie nicht alle zugleich $= 0$ sein dürfen), so folgt aus ihrer Anzahl $= 10$, da es nur auf ihre Verhältnisse ankommt, daß man 9 voneinander unabhängige Bedingungen ansetzen muß, um eine Fläche zweiter Ordnung zu bestimmen. So darf man verlangen, daß sie durch irgendwelche 9 gegebenen Punkte hindurchgehe. Auch bietet die analytische Durchführung keine theoretischen Schwierigkeiten, da man in 8) nur der Reihe nach statt des laufenden Punktes diese 9 Punkte

einzusetzen und darauf die 9 Gleichungen nach 9 der Koeffizienten aufzulösen hat. Freilich würde die numerische Ausrechnung meist sehr langwierig werden und man hat daher begreiflicherweise eifrig nach geeigneten Konstruktionen, die den in I, § 23 so ausführlich behandelten linearen Konstruktionen eines Kegelschnittes aus fünf Punkten entsprechen sollten, gesucht, allerdings nicht ganz mit dem gewünschten Erfolg.

Doch dies nebenbei. Hier soll es sich nur um einige einfache allgemeine Sätze handeln, die aus der Gleichung 8) ohne Mühe abgeleitet werden können. Setzt man in 8) $z = 0$, schneidet also die Fläche durch die xy-Ebene, so folgt:

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{23}y^2 + 2\,a_{14}x + 2\,a_{14}y + a_{44} = 0,$$

also die Gleichung eines Kegelschnittes. Man kann aber durch Transformation jede Ebene im Raum zur xy-Ebene machen, also:

Eine Fläche zweiter Ordnung wird durch jede Ebene in einer (reellen oder imaginären, vielleicht auch in zwei Gerade zerfallenden) Kurve zweiter Ordnung geschnitten.

Nimmt man irgend einen Schnitt parallel zur xy-Ebene, denkt also für z in 8) einen bestimmten Wert gesetzt und schreibt diese Gleichung dementsprechend:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2\,a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2\,(a_{14} + a_{13}z)x \\ + 2\,(a_{24} + a_{23}z)y + (a_{33}z^2 + 2\,a_{34}z + a_{44}) = 0, \end{aligned}$$

so ist ersichtlich, daß die Glieder zweiten Grades von dem Abstand z gar nicht abhängen. Daher nach I, § 17, S. 215:

Alle Parallelschnitte einer Fläche zweiter Ordnung sind ähnliche (bzw. konjugierte) Kurven zweiter Ordnung mit parallelen Achsenrichtungen.

(Ist im besonderen einer dieser Schnitte ein Kreis, so sind sie alle Kreise.) Der Mittelpunkt $M(\alpha, \beta, \gamma)$ des Schnittes im Abstande z wird nach I, § 17 durch die Formeln bestimmt:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + (a_{14} + a_{13}z) = 0, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + (a_{24} + a_{23}z) = 0. \end{aligned} \qquad 9)$$

Bedenkt man, daß M als Punkt im Raume drei Koordinaten hat, nämlich α, β und das gewählte z, so stellen in diesem Sinne die eben aufgestellten Gleichungen zwei Ebenen vor, auf deren Schnittlinie also der Mittelpunkt liegen muß. Daher:

Die Mitten paralleler Schnitte irgend einer Fläche zweiter Ordnung liegen auf einer geraden Linie.

Setzt man in 9) γ an die Stelle von z und sucht ebenso den geometrischen Ort für die Mitten der Schnitte parallel zur yz- und parallel zur zx-Ebene, so entstehen im ganzen drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + a_{14} &= 0, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma + a_{24} &= 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma + a_{34} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

derart, daß je zwei stets für je eine der Scharen paralleler Ebenen diejenige gerade Linie bestimmen, auf welcher die Mittelpunkte der Schnitte liegen. Diese drei Linien schneiden sich daher in einem Punkt $M(\alpha, \beta, \gamma)$, dessen Koordinaten durch Auflösung der drei Gleichungen 10) nach α, β, γ zu ermitteln sind.

Dies ist aber nicht alles. Denn der Punkt M ist nicht allein der Schnittpunkt dieser drei geraden Linien, sondern jeder Geraden, auf welcher die Mitten **irgend** einer Schar paralleler Schnitte liegen.

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Fläche.

Zum Beweise verschiebe man das Koordinatensystem parallel mit sich selbst so, daß M zum neuen Anfangspunkt wird, und bezeichne die neuen Koordinaten des laufenden Punktes mit $x_1 y_1 z_1$. Die Transformationsformeln:

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta, \quad z = z_1 + \gamma \tag{11}$$

verwandeln die Gleichung 8) nach Einsetzen in eine andere, bei der aber die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades dieselben geblieben sind (I, § 17). Die neuen Koeffizienten der Glieder ersten Grades findet man aber gleich den doppelten Werten der linken Seiten der Gleichungen 10). Sie sind also $= 0$. Die transformierte Gleichung wird daher:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + 2\,a_{23}y_1 z_1 \\ + 2\,a_{31}z_1 x_1 + 2\,a_{12}x_1 y_1 + a'_{44} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Für die neue Konstante a'_{44} ergibt sich auf genau dieselbe Art, wie in I, § 17*), der Wert:

$$a'_{44} = a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma + a_{44}. \tag{13}$$

*) Die zugehörigen Rechnungen sind an der betreffenden Stelle nachzulesen.

Hier sind noch für α, β, γ die aus 10) folgenden Ausdrücke einzusetzen. Diese Ausdrücke werden Brüche mit demselben Nenner:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{14}$$

und die Zähler erscheinen nach I, § 20 auch in Determinantenform. Nach Einführung in 13) erhält man dann:

$$a'_{44} = \frac{D}{\varDelta}, \tag{15}$$

wo D eine Determinante vierten Grades ist, nämlich:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{16}$$

$\varDelta$ ist hier die **„kleine"**, D die **„große"** Diskriminante. (Siehe I, § 17.)

In der Gleichung 12) fehlen die Glieder ersten Grades, so daß in der Tat der neue Anfangspunkt Mittelpunkt der Fläche sein muß. Denn 12) bleibt unverändert, wenn die Vorzeichen von x_1, y_1, z_1 alle drei gewechselt werden, d. h.: Wenn der Punkt $P(x_1 y_1 z_1)$ auf der Fläche liegt, so liegt auch der gegenüberliegende Punkt $P'(-x_1, -y_1, -z_1)$ auf ihr.

Ist $\varDelta = 0$, so werden α, β, γ und a'_{44} im allgemeinen unendlich groß. M liegt unendlich fern und die Form 12) ist unerreichbar. Also:

Jede Fläche zweiter Ordnung hat einen Mittelpunkt M, dessen Koordinaten α, β, γ durch Auflösung der Gleichungen 10) erhalten werden. Ist $\varDelta = 0$, so liegt M unendlich fern. Ist $\varDelta$ aber nicht $= 0$, so kann man M zum Anfangspunkt machen und so die Gleichung der Fläche von den Gliedern ersten Grades befreien.

Kehren wir aber zum Ausgangspunkt, zur allgemeinen Gleichung 8) zurück.

Um die Schnittpunkte mit der x-Achse zu finden, setze man $y = 0$ und $z = 0$. Es folgt:

$$a_{11}x^2 + 2\,a_{14}x + a_{44} = 0.$$

Je nachdem die beiden Wurzeln dieser Gleichung reell und verschieden, oder einander gleich, oder imaginär sind, wird die Fläche von der x-Achse geschnitten oder berührt oder überhaupt nicht getroffen.

Es kann aber auch der Ausnahmefall eintreten, daß die Gleichung identisch verschwindet, also $a_{11} = a_{14} = a_{44} = 0$. Dann liegt eben die x-Achse ganz in der Fläche. Und da eine Gleichung zweiten Grades unter keinen Umständen mehr als zwei Wurzeln haben kann, es sei denn, daß sie zur Identität werde, so ist zu schließen, daß die x-Achse, also auch irgend eine Gerade im Raum ganz in der Fläche liegt, wenn man von mehr als zwei auf der Geraden liegenden Punkten weiß, daß sie der Fläche angehören.

Daraus geht z. B. hervor, daß durch drei beliebig gegebene und zueinander windschiefe Gerade l_1, l_2, l_3 nur eine einzige Fläche zweiter Ordnung gehen kann. Denn jede Gerade l, welche sie alle drei schneidet, muß hiernach ganz in der Fläche liegen; andererseits bildet aber die Gesamtheit dieser Geraden l, wie im vorigen Paragraphen erwiesen, eine Fläche zweiter Ordnung.

Diese wenigen einfachen Untersuchungen sind als die ersten Anfänge einer allgemeinen Diskussion der Fläche zweiter Ordnung überhaupt anzusehen. Sie sind hier vorweggenommen, weil man von ihnen im folgenden Paragraphen, der von den verschiedenen Arten der Flächen zweiter Ordnung und ihren Eigenschaften handeln wird, mit Vorteil Gebrauch machen kann. Die wirkliche und erschöpfende Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades schließt sich dann unmittelbar in § 15 und § 16 an.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben irgend vier lineare Ausdrücke U_1, U_2, U_3, U_4, wie in Aufgabe 3, § 8. Es soll die allgemeine Form für die Gleichungen derjenigen Flächen zweiter Ordnung gefunden werden, welche sowohl durch die Gerade l_1 (Schnittlinie von $U_1 = 0$ und $U_2 = 0$), als auch durch die Gerade l_2 (Schnittlinie von $U_3 = 0$ und $U_4 = 0$) gehen.

2. Nach 1. soll dann die Form für die Gleichungen der Flächen zweiter Ordnung gefunden werden, welche außer durch l_1 und l_2 auch noch durch l_3 (Schnittlinie von $U_1 = 0$ und $U_3 = 0$) und l_4 (Schnittlinie von $U_2 = 0$ und $U_4 = 0$) gehen.

3. Gegeben die vier Punkte:

$P_0 (0, 0, 0)$, $P_1 (0, +a, +a)$, $P_2 (+a, 0, +a)$, $P_3 (+a, +a, 0)$.

Gesucht die Gleichung derjenigen Fläche zweiter Ordnung, welche durch das windschiefe Viereck $P_0 - P_1 - P_2 - P_3 - P_0$ und auch durch den Schwerpunkt des Tetraeders $P_0 P_1 P_2 P_3$ hindurchgeht.

4. Gegeben vier Ebenen $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_4 = 0$. Es soll die allgemeinste Form der Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung aufgeschrieben werden, welche durch die vier Ecken des von den vier Ebenen gebildeten Tetraeders hindurchgeht.

§ 14.

Die verschiedenen Arten von Flächen zweiter Ordnung. Umdrehungsflächen.

I) Das Ellipsoid (Fig. 16).

Seine Gleichung wird in einfachster Form:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 1)$$

a, b, c sind die drei Halbachsen der drei Hauptschnitte, nämlich der Schnitte mit der yz-, der zx- und der xy-Ebene, also denjenigen drei Ebenen, in bezug auf welche die Fläche symmetrisch ist (da die Gleichung unverändert bleibt, wenn die Vorzeichen von x, von y und von z einzeln oder auch alle zusammen gewechselt werden). A, A_1, B, B_1, C, C_1 sind die sechs Scheitel der Fläche.

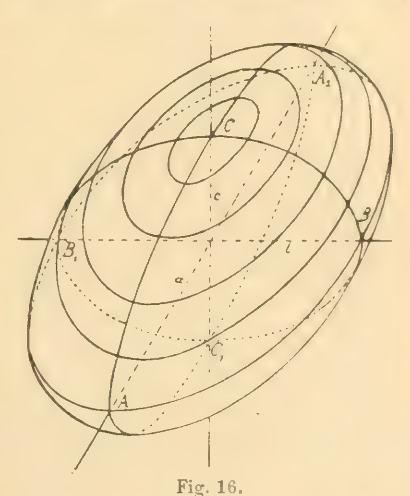


Fig. 16.

Eine geometrische Definition des Ellipsoids, welche derjenigen der Ellipse durch ihre Brennpunkte entsprechen würde, ist nur auf künstlichen Umwegen zu erlangen; am besten erklärt man diese Fläche für eine sehr einfache räumliche Reliefprojektion der Kugel. Setzt man den Radius derselben etwa $= 1$, so

lautet ihre Mittelpunktsgleichung, wenn die laufenden Koordinaten mit x_1, y_1, z_1 bezeichnet werden:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1. \qquad 2)$$

Nach Einführung der folgenden Transformationsformeln:

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad y_1 = \frac{y}{b}, \quad z_1 = \frac{z}{c} \qquad 3)$$

entsteht also die Gleichung 1) des Ellipsoids. Daher:

Das Ellipsoid ist eine räumliche affine Abbildung der Kugel (I, § 14 u. § 26). Diese Abbildung wird durch die Gleichungen 3) definiert und entspricht kurz gesagt drei zueinander senkrechten Ausdehnungen oder Zusammenziehungen im Verhältnis $a:1$; $b:1$; $c:1$. Ist aber der Kugelradius $= a$, so ist 3) durch:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y \cdot \frac{a}{b}, \quad z_1 = z \cdot \frac{a}{c} \qquad 4)$$

zu ersetzen und die Deformation beschränkt sich auf zwei zueinander senkrechte Richtungen.

Das Ellipsoid ist die einzige vollständig geschlossene Fläche zweiter Ordnung. Sind zwei der drei Halbachsen, etwa a und b einander gleich, so wird der zugehörige Hauptschnitt zum Kreise und die Fläche entsteht durch Umdrehung einer Ellipse mit den Halbachsen a und c um die eine Halbachse c. Sie wird zum Umdrehungs- oder Rotationsellipsoid mit der Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 1a)$$

Jede in der xy-Ebene gezogene Halbachse ist dann $= a$ und die Fläche hat nicht mehr drei, sondern unzählig viele Hauptachsenrichtungen, nämlich erstens die Rotationsachse und zweitens alle auf ihr senkrecht stehenden Achsen. Ist $c > a$, so heißt das Ellipsoid verlängert, ist $c < a$, so verkürzt oder abgeplattet. (Die Oberflächen der Planeten sind nahezu Ellipsoide der letzteren Art und ihre Abplattung ist je nach ihrer Größe und der Schnelligkeit ihrer Achsendrehung mehr oder weniger stark.)

Wenn aber endlich $a = b = c$, so wird das Ellipsoid zur Kugel und jede durch den Mittelpunkt gehende Gerade zur Hauptachse.

II) Das einschalige Hyperboloid (Fig. 17).

Seine Gleichung entsteht aus 1) durch Wechsel des Vorzeichens in einem einzigen quadratischen Glied, etwa im dritten. Sie wird also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 5)$$

Hier ist der in der xy-Ebene liegende Hauptschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, die sogenannte Kehlellipse. Sie ist der kleinste ebene Schnitt der Fläche. Die beiden anderen Hauptschnitte sind Hyperbeln mit den reellen Halbachsen a und b und derselben imaginären Halbachse c.

Ein charakteristisches Merkmal der einschaligen Hyperboloide sind ihre beiden Scharen von geraden Linien (siehe § 12), deren Existenz gerade auf diesen Flächen aber erst später nachgewiesen werden soll. Ist $a = b$, so wird die Kehlellipse zum Kreis und die Fläche entsteht durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre imaginäre Achse (oder auch einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Achse).

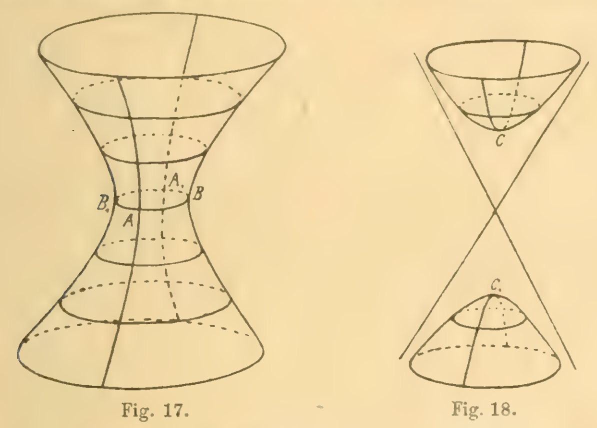


Fig. 17. Fig. 18.

III) Das zweischalige Hyperboloid (Fig. 18).

Seine Gleichung entsteht aus 1) durch Wechsel des Vorzeichens in zwei quadratischen Gliedern, etwa im ersten und zweiten. Sie ist also:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 6)$$

Setzt man $z = 0$, so entsteht als Schnitt mit der xy-Ebene eine imaginäre Ellipse, d. h. die Fläche wird von der xy-Ebene nicht

geschnitten. Die beiden anderen Hauptschnitte sind Hyperbeln, beide mit derselben reellen Halbachse c und den imaginären Halbachsen a und b. Die Fläche hat also nur zwei reelle, auf der z-Achse liegende Scheitel und zerfällt in zwei getrennte „Schalen“. Das letztere folgt auch sofort, wenn man Parallelschnitte zur xy-Ebene nimmt und hierzu die Gleichung 6) so schreibt:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1.$$

Solange $z < c$, bleibt der Schnitt imaginär, für $z = \pm c$ schrumpft er in einen Punkt zusammen (Berührungsebenen in den Scheiteln) und erst, wenn $z > c$, werden wirkliche elliptische Schnitte erhalten.

Ist $a = b$, so werden diese Schnitte zu Kreisen. Die Fläche wird zum zweischaligen Umdrehungshyperbolid, entstanden durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre reelle Achse.

Ia) Das imaginäre Ellipsoid.

Seine Gleichung ist:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{1b}$$

Die „Fläche“ hat offenbar gar keine reellen Punkte, sie ist vollständig imaginär. Ihre Aufzählung ist nur der Vollständigkeit wegen (im analytischen Sinne) erfolgt.

IV) Der elliptische Kegel (Fig. 19).

Läßt man in 5) oder 6) die Konstante (— 1) fort, so wird die Gleichung homogen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{7}$$

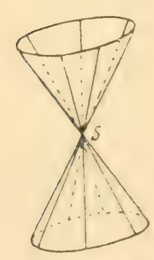


Fig. 19.

und stellt daher einen Kegel mit dem Anfangspunkt als Spitze dar (vgl. § 5). Schneidet man ihn durch eine Ebene parallel zur xy-Ebene im Abstande $z = c$, so entsteht eine Ellipse mit den Halbachsen a und b. Da aber die entsprechenden Schnitte parallel zur xz- und yz-Ebene Hyperbeln werden, so würde man den Kegel ebensogut hyperbolisch und, da es auch parabolische Schnitte gibt, auch parabolisch nennen können. Wenn $a = b$, so

wird aus der erstgenannten Ellipse ein Kreis und aus dem Kegel ein gerader Kreiskegel um die z-Achse. Der Öffnungswinkel φ, d. h. die Neigung der Kegelkante gegen die Kegelachse bestimmt sich dann durch die Formel:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.$$

IVa) Der imaginäre Kegel zweiter Ordnung.

Wird in 1) oder 1a) die Konstante (-1) fortgelassen, so entsteht die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

welche ein zu einem Punkt zusammengeschrumpftes Ellipsoid oder auch, wie man in bezug auf die homogene Form der Gleichung sagt, einen imaginären Kegel, an dem nur die Spitze $P(0, 0, 0)$ reell ist, darstellt.

V) Das elliptische Paraboloid (Fig. 20).

Seine Gleichung ist in einfachster Form (Scheitelgleichung):

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}. \qquad 8)$$

Der Schnitt mit der xy-Ebene schrumpft zu einem Punkt, dem Anfangspunkt zusammen, d. h. die Fläche wird von ihr in diesem Punkte, dem Scheitel, berührt. Die Schnitte mit der xz- und der yz-Ebene sind Parabeln mit S als Scheitel und der $+z$-Achse als Hauptachse. Für positive Werte von z erhält man als Parallelschnitte zur xy-Ebene größer und größer werdende ähnliche Ellipsen, aber für negative Werte von z werden die Schnitte imaginär. Man sieht auch, wie die Fläche sich nach und nach aufrichtet (wenn die z-Achse vertikal steht).

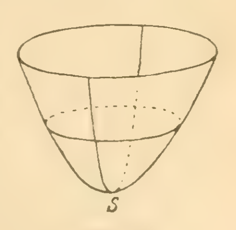


Fig. 20.

Ist $p = q$, so werden die genannten Parallelschnitte kreisförmig. Die Fläche entsteht durch Umdrehung einer Parabel um ihre Hauptachse. Sie wird zum Rotationsparaboloid.

VI) Das hyperbolische Paraboloid (Fig. 21).

Seine Scheitelgleichung ist:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}. \tag{9}$$

Der Schnitt mit der xy-Ebene hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0.$$

Er zerfällt also in zwei durch den Anfangspunkt S gehende, zur x-Achse und also auch zur y-Achse symmetrisch liegende Gerade. Die Schnitte mit der xz- und der yz-Ebene sind zwei Parabeln:

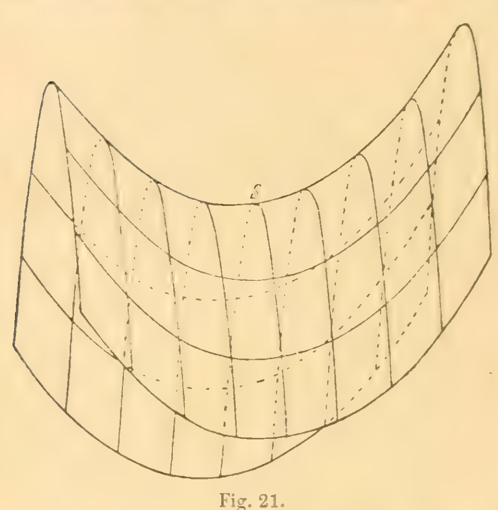


Fig. 21.

$$z = \frac{x^2}{2p},$$

$$z = -\frac{y^2}{2q}.$$

Sie haben beide den Scheitel in S. Aber bei der einen liegt der Brennpunkt auf der $+z$-Achse im Abstande $\frac{p}{2}$, bei der anderen auf der $-z$-Achse im Abstande $\frac{q}{2}$. Die erstere geht also um die $+z$-, die letztere um die $-z$-Achse. Die Parallelschnitte zur xy-Ebene werden Hyperbeln, deren reelle Scheitel auf der ersten Parabel liegen, wenn z positiv und auf der zweiten, wenn z negativ ist. Projiziert man diese Hyperbeln auf die xy-Ebene, so erscheinen sie als die beiden Scharen konjugierter Hyperbeln mit denselben durch den zu Anfang genannten Schnitt mit der xy-Ebene bestimmten Asymptoten.

Schreibt man 9) in den beiden Formen:

$$\left(z + \frac{y^2}{2q}\right) = \frac{x^2}{2p}, \qquad \left(z - \frac{x^2}{2p}\right) = -\frac{y^2}{2q},$$

so ist sofort ersichtlich, daß alle Schnitte parallel zur xz-Ebene und auch parallel zur yz-Ebene kongruente Parabeln sind.

Die Scheitel der ersten Schar liegen auf dem in der yz-, die der zweiten auf dem in der xz-Ebene gelegenen Hauptschnitt. Die Fläche entsteht also, wenn eine der beiden Parabeln:

$$y = 0, \quad z = \frac{x^2}{2p}; \qquad x = 0, \quad z = -\frac{y^2}{2q}$$

parallel mit sich selbst so fortbewegt wird, daß ihr Scheitel an der anderen Parabel entlang gleitet.

Wenn $p = q$, so werden diese beiden Parabeln kongruent. Die Fläche erscheint dann von oben und von unten gesehen ganz gleich*); man nennt sie ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. [Siehe Aufgabe b), § 4, S. 38.]

Anmerkung: Macht man in 8) beide quadratische Glieder negativ:

$$z = -\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \tag{8a}$$

so wird nicht etwa noch eine dritte Art von Paraboloiden, sondern wieder ein elliptisches, sich um die $(-z$-$)$ Achse krümmendes Paraboloid erhalten.

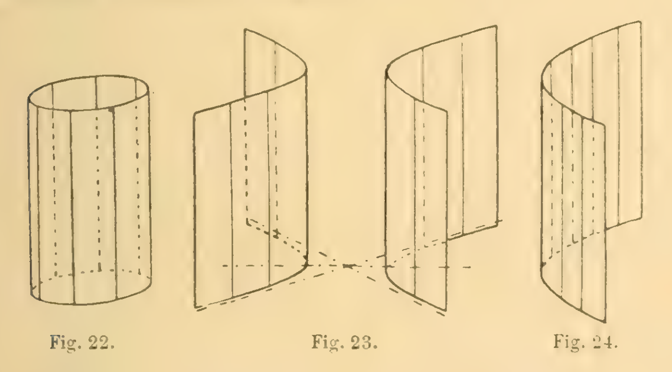


Fig. 22. Fig. 23. Fig. 24.

VII) Der elliptische Zylinder (Fig. 22).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{10}$$

Ist $a = b$, so entsteht der gerade Kreiszylinder.

VIII) Der hyperbolische Zylinder (Fig. 23).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{11}$$

*) Allerdings dabei noch um 90^0 verstellt.

IX) Der parabolische Zylinder (Fig. 24).

$$x^2 - 2py = 0. \qquad \textbf{12)}$$

Er ist die einzige Fläche zweiter Ordnung, welche nur parabolische Schnitte hat. Nur wenn die Schnittebene auf der xy-Ebene senkrecht steht, artet die Parabel in zwei parallele Linien, in zwei Zylinderkanten aus.

VIIa) Der imaginäre elliptische Zylinder.

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad \textbf{13)}$$

X) Die uneigentliche, in zwei Ebenen zerfallende Fläche zweiter Ordnung.

Falls die linke Seite der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ in zwei Faktoren ersten Grades U_1 und U_2 zerlegt werden kann, die Gleichung also die Form hat:

$$U_1 \cdot U_2 = 0, \qquad \textbf{14)}$$

wo U_1 und U_2 Ausdrücke ersten Grades sind:

$$U_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1, \qquad U_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2,$$

so zerfällt die Fläche in die beiden Ebenen E_1 und E_2 mit den Gleichungen:

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = 0.$$

Macht man die Durchschnittslinie dieser Ebenen zur z-Achse, so werden $c_1 = d_1 = c_2 = d_2 = 0$. Nimmt man ferner die beiden Winkelhalbierebenen von E_1 und E_2 zur xz- und yz-Ebene, so erhält die Gleichung 14) ihre einfachste Form:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad \textbf{14a)}$$

Sind aber E_1 und E_2 parallel, so mache man die Mittelebene zur xy-Ebene und bezeichne mit $\pm c$ ihre Abstände von E_1 und E_2. Dann erhält 14) die Gestalt:

$$\frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \text{oder} \quad z^2 - c^2 = 0. \qquad \textbf{14b)}$$

Ist noch $c = 0$, so fallen E_1 und E_2 zusammen.

Es können aber auch E_1 und E_2 (konjugiert) imaginär sein. Dann bleibt nur ihre Durchschnittslinie reell. Die einfachste Form der Gleichung wird in diesem Falle:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0. \qquad \textbf{14c)}$$

Sie zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0,$$

und wird, wenn man sich auf reelle Punkte beschränkt, nur für $x = 0$, $y = 0$, d. h. für Punkte der z-Achse erfüllt. Die Fläche kann auch als unendlich dünner, elliptischer Zylinder angesehen werden.

Endlich ist noch die Gleichung:

$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \qquad \textbf{14d)}$$

zu erwähnen, für den Fall, daß sich die Fläche in zwei parallele, aber imaginäre Ebenen spaltet.

Diese Aufzählung, deren Vollständigkeit allerdings noch nachzuweisen ist (§ 15 und 16), umfaßt, von den zerfallenden, den imaginären und den zu einem Punkte oder zu einer geraden Linie zusammenschrumpfenden Flächen abgesehen, neun verschiedene Arten von Flächen zweiter Ordnung. So verschieden sind sie aber doch nicht, daß es schwierig wäre, ihre Formen und Gestalten ineinander überzuführen.

Man gehe hierzu vom Ellipsoid I) aus, lasse in demselben einen Scheitel A, der Endpunkt der größten Achse sein möge, und die beiden dem Scheitel A näherliegenden Brennpunkte der durch A gehenden Hauptschnitte unverändert, während sich der Mittelpunkt M, also auch der andere Scheitel A_1 unbegrenzt weit entfernen möge. Dann werden die genannten Hauptschnitte zu Parabeln und das Ellipsoid verwandelt sich in das elliptische Paraboloid V).

Läßt man aber M und A_1 auf die andere Seite der Achse treten, so entstehen zwei Hyperbeln mit A und A_1 als Scheiteln. Die Fläche wird zum zweischaligen Hyperboloid III).

Weiter betrachte man die Schar aller konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden zweischaligen Hyperboloide, setze also in 6) λa, λb, λc statt a, b, c, so daß nach Multiplikation mit λ^2 erhalten wird:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \lambda^2.$$

λ kann alle Werte annehmen. Für lim: $\lambda = 0$ entsteht, wie man sieht, der elliptische Kegel IV) (der Asymptoten-

kegel der Schar). Wird aber statt λ^2 einfach k gesetzt, damit sich an $k = 0$ unmittelbar negative Werte von k anschließen können, so wird die konjugierte Schar der einschaligen, den Asymptotenkegel umschließenden Hyperboloide erzielt und $k = -1$ gibt nach Division durch -1 die Gleichung 5) des einschaligen Hyperboloids II).

Nun halte man den Scheitel A der großen Achse der Kehlellipse von II), den zugehörigen Brennpunkt derselben, sowie den näheren Brennpunkt der durch A gehenden Haupthyperbel fest und lasse den Mittelpunkt M, also auch den gegenüberliegenden Scheitel A_1, sich unbegrenzt weit entfernen. Dann werden die Kehlellipse und die genannte Hyperbel zu Parabeln mit dem Scheitel A, deren Brennpunkte aber auf entgegengesetzten Seiten der gemeinsamen Hauptachse liegen. Die Fläche verwandelt sich in das hyperbolische Paraboloid VI).

Wiederum vom Ellipsoid I) ausgehend, lasse man c unbegrenzt wachsen. Es entsteht der elliptische Zylinder VII). Aus diesem wieder werden durch allmähliche Umformung des Querschnittes der parabolische Zylinder IX) und der hyperbolische Zylinder VIII). Und läßt man endlich den hyperbolischen Querschnitt von VIII) in zwei Gerade ausarten, so verwandelt sich der Zylinder in zwei Ebenen X).

Selbstverständlich gibt es noch viele andere stetige Umwandlungen der Flächen zweiter Ordnung ineinander; die genannten genügen aber wohl, um von vornherein erkennen zu lassen, daß die wesentlichsten Eigenschaften einer Art sich in denen einer anderen Art werden wiedererkennen lassen.

Noch sind drei ausgesprochene Typen von Flächen zweiter Ordnung namhaft zu machen, nämlich:

Typus A. Flächen, deren Tangentialebenen nicht schneiden, sondern nur im Berührungspunkte berühren. (Flächen mit elliptischer Krümmung. Krümmungsmaß von Gauß*) positiv.) Hierher gehören: Das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid.

---

*) Unter dem Gaußschen Krümmungsmaß versteht man den Ausdruck $\frac{1}{r_1 r_2}$, wo r_1 und r_2 die sogenannten „Hauptkrümmungsradien" der Fläche sind.

Typus B. Flächen, deren Tangentialebenen längs einer geraden Linie berühren. (Parabolische Krümmung, Krümmungsmaß von Gauß = 0.) Dieser Typus umfaßt: Kegel und Zylinder.

Typus C. Flächen, deren Tangentialebenen nicht allein im Berührungspunkt berühren, sondern die Fläche außerdem noch (in zwei Geraden) schneiden. (Sattelförmige oder hyperbolische Krümmung. Krümmungsmaß von Gauß negativ.) Es sind: Das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid.

Typus B ist offenbar der Grenzfall zwischen Typus A und Typus C.

Umdrehungsflächen: Unter allen Flächen zweiter Ordnung sind der Anschauung am unmittelbarsten die Umdrehungsflächen zugänglich, von denen wir das Rotationsellipsoid, das einschalige und das zweischalige Rotationshyperbolid, das Rotationsparaboloid, den geraden Kreiskegel und den geraden Kreiszylinder kennen gelernt haben. Sie entstehen alle durch Umdrehung einer Kurve zweiter Ordnung, die beim Kegel und Zylinder in zwei Gerade zerfällt, um eine Hauptachse, und zu ihnen muß daher auch der parabolische Zylinder als Grenzfall gerechnet werden (als entstanden durch Rotation der Parabel um die unendlich ferne Hauptachse).

Welche Bedingungen müssen zwischen den Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{13} ... einer allgemeinen Gleichung 8), § 13 zweiten Grades bestehen, wenn die Fläche eine Rotationsfläche sein soll?

Zur Lösung dieser Frage gibt die Formel 1a), § 5 für die Form der Gleichung einer Rotationsfläche überhaupt einen geeigneten Ausgangspunkt. Denn aus ihr ist zu entnehmen, daß die durch 8), § 13 gegebene Fläche nur dann eine Rotationsfläche ist, wenn ihre Gleichung durch Koordinatentransformation auf die Form:

$$\lambda (x_1^2 + y_1^2) + A z_1^2 + B z_1 + C = 0$$

gebracht werden kann. (Dann ist die z_1-Achse Rotationsachse.) Wählt man aber als neue z-Achse irgend eine Parallele zur Rotationsachse, so bleiben (siehe S. 142) die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades genau so, wie in der eben aufgeschriebenen Gleichung. Es kann daher von der Verschiebung des Anfangspunktes abgesehen und das Problem so gestellt werden:

Welche Bedingungen müssen zwischen den sechs Koeffizienten:

$$a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{23},\ a_{31},\ a_{12}$$

einer homogenen quadratischen Form:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \qquad \textbf{15)}$$

bestehen, damit sie durch eine noch zu bestimmende orthogonale Transformation 3), § 3 in die Form:

$$\lambda(x_1^2 + y_1^2) + Az_1^2 \qquad \textbf{16)}$$

verwandelt werden könne?

Die orthogonale Substitution 3), § 3 und ihre Umkehrung 3′), § 3 enthalten neun Koeffizienten, von denen hier aber nur drei in Betracht kommen, nämlich a_3, b_3, c_3. Zum Beweise benutze man die Identität:

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

und schreibe:

$$\begin{aligned}\lambda(x_1^2 + y_1^2) + Az_1^2 &= \lambda(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (A - \lambda)z_1^2 \\ &= \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + kz_1^2,\end{aligned}$$

wo k für $A - \lambda$ gesetzt ist. Nun ist nach der letzten der Formeln 3a), § 3, wenn diesmal der Index 3 weggelassen wird:

$$z_1 = ax + by + cz.$$

Daher:

$$\lambda(x_1^2 + y_1^2) + Az_1^2 = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + k(ax + by + cz)^2. \qquad \textbf{16a)}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist also das Ergebnis der Transformation 3a), § 3 auf die linke Seite, die aber ihrerseits durch die umgekehrte Transformation 3), § 3 aus der gegebenen Form 15) entstanden sein soll. Die rechte Seite und diese Form müssen also identisch sein:

$$\begin{aligned}a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \\ \equiv \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + k(ax + by + cz)^2.\end{aligned} \qquad \textbf{17)}$$

Diese Identität muß daher bei passender Wahl von λ, k, a, b, c erreichbar sein, wenn die Fläche eine Umdrehungsfläche sein soll. Sie zerfällt nach Auflösen der Klammern und Vergleichung der Koeffizienten links und rechts in die sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned}a_{11} &= \lambda + ka^2, & a_{22} &= \lambda + kb^2, & a_{33} &= \lambda + kc^2, \\ a_{23} &= kbc, & a_{31} &= kca, & a_{12} &= kab.\end{aligned} \qquad \textbf{18)}$$

Die gesuchten Bedingungen für eine Umdrehungsfläche entstehen also durch Elimination von λ, k, a, b, c aus 18), wobei zu bemerken ist, daß man dabei der Gleichung zwischen a, b, c, nämlich:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

die bestehen muß, falls a, b, c wirklich Koeffizienten der orthogonalen Substitution sein sollen, absehen kann (des Faktors k wegen). Denn man könnte $k = +1$ setzen, wenn man in 18) statt a, b, c schreiben würde: $a \cdot \sqrt{+k}$, $b \cdot \sqrt{+k}$, $c \cdot \sqrt{+k}$.

Folglich sind $6 - 4 = 2$ Bedingungen zu erwarten. Die Elimination selbst geht sehr einfach vonstatten, wenn man aus den drei letzten Gleichungen 18) die Kombinationen bildet:

$$\frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{23}} = k\,a^2, \quad \frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{31}} = k\,b^2, \quad \frac{a_{23} \cdot a_{31}}{a_{12}} = k\,c^2, \qquad \textbf{19)}$$

in die drei ersten Gleichungen einsetzt und λ eliminiert. Man erhält:

$$a_{11} - \frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{23} \cdot a_{31}}{a_{12}} \qquad \textbf{20)}$$

und dies sind die gesuchten Bedingungen für eine Rotationsfläche. Werden sie im gegebenen Falle als erfüllt befunden, so findet man aus 18) die Richtung der Drehungsachse sofort durch die Proportion:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = a : b : c = \frac{1}{a_{23}} : \frac{1}{a_{31}} : \frac{1}{a_{12}} \cdot \qquad \textbf{21)}$$

Bemerkung zu dieser Untersuchung: Für den Mathematiker ist es etwas Alltägliches, daß Sätze oder Formeln, die im allgemeinen richtig sind, in besonderen Fällen ihre Dienste versagen und „illusorisch" werden. Er übt deswegen schon gewohnheitsmäßig die nötige Umsicht und Vorsicht, um auch diese Fälle zu umspannen und auch nicht den kleinsten Rest von Zweifel übrig zu lassen.

Wie angebracht diese Umsicht und Vorsicht ist, soll an den eben abgeleiteten und im allgemeinen einwandfreien Resultaten 20) und 21) gezeigt werden*). Diese haben eine stillschweigende Voraussetzung gehabt, nämlich daß keiner der

*) Vgl. auch § 20.

drei Koeffizienten a_{23}, a_{31}, a_{12} verschwinde, weil sonst die drei Ausdrücke:

$$\frac{a_{31} \cdot a_{12}}{a_{23}}, \quad \frac{a_{12} \cdot a_{23}}{a_{31}}, \quad \frac{a_{23} \cdot a_{31}}{a_{12}}$$

zum Teil unendlich, bzw. wenn zwei verschwinden, unbestimmt $\left(\text{von der Form } \frac{0}{0}\right)$ werden.

Man setze also ausdrücklich als Ausnahmefall z. B.:

$$a_{12} = 0.$$

Dies gibt nach 18) entweder $k = 0$, oder $a = 0$, oder $b = 0$. Für $k = 0$ liegt die Sache am einfachsten. Dann ist auch $a_{31} = a_{23} = 0$ und $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, d. h. die gegebene Form reduziert sich auf: $\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$ und die Fläche wird zur Kugel.

Für $a = 0$ wird noch $a_{13} = 0$, aber nicht $a_{23} = 0$ (wenn nicht noch b oder $c = 0$). Für $b = 0$ wird noch $a_{23} = 0$. Es sei das erstere der Fall, also $a = 0$ und $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$.

Dann bleiben von den Gleichungen 18) nur noch vier übrig, nämlich:

$$a_{11} = \lambda, \quad a_{22} = \lambda + kb^2, \quad a_{33} = \lambda + kc^2, \quad a_{23} = kbc, \qquad \textbf{18a)}$$

aus denen nun λ, k, b, c zu eliminieren ist. Es folgt:

$$a_{22} - a_{11} = kb^2, \quad a_{33} - a_{11} = kc^2$$

und daher, da $kb^2 \cdot kc^2 = k^2 \cdot b^2 \cdot c^2 = (a_{23})^2$:

$$(a_{22} - a_{11}) \cdot (a_{23} - a_{11}) - (a_{23})^2 = 0. \qquad \textbf{20a)}$$

Dies ist also in diesem Ausnahmefall die Bedingung für eine Rotationsfläche. Ist sie erfüllt, so berechne man $b:c$ durch die Proportion:

$$b^2 : bc : c^2 = a_{22} - a_{11} : a_{23} : a_{33} - a_{11}$$

und darauf die Richtung α, β, γ der Rotationsachse:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 0 : b : c, \qquad \textbf{21a)}$$

welche auf der x-Achse senkrecht steht.

Übungsaufgaben.

1. Wann ist eine Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung die Form hat:

$$axy + byz + czx + dx + ey + fz + g = 0,$$

eine Umdrehungsfläche?

2. Gegeben irgend zwei windschiefe Gerade l_1, l_2. Es sollen alle durch sie hindurchgehenden Umdrehungsflächen zweiter Ordnung auf-

gefunden werden. (Alle Möglichkeiten, die eine Gerade l_1 durch Drehung um eine Achse in die Lage der anderen l_2 überzuführen.) Die Fläche der Achsen ist zu bestimmen.

§ 15.

Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

Es sei vorgelegt irgend eine Gleichung zweiten Grades in x, y, z:

$$\begin{aligned} a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} y z + 2 a_{31} z x + 2 a_{12} x y \\ + 2 a_{14} x + 2 a_{24} y + 2 a_{34} z + a_{44} = 0, \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

deren zehn Koeffizienten $a_{11} \ldots a_{44}$ beliebige Werte haben sollen.

Gehört die Fläche mit dieser Gleichung einer der zehn im vorigen Paragraphen aufgezählten Arten an und welcher? Wo liegt der Mittelpunkt, welche Richtungen haben die Achsen, wie groß sind dieselben?

Diese Fragen sind durch eine Diskussion zu erledigen, die sich im wesentlichen an den Versuch knüpfen wird, durch Koordinatentransformation eine der dort angeführten Gleichungsformen zu erlangen. Dabei wird man sich zunächst nicht an das halten, was diese Formen trennt, sondern an das, was sie gemeinsam haben und daher im Hinblick auf die Hauptformen 1), 2), 3) und 3a) die Forderung so stellen:

Die gegebene Gleichung I) soll so transformiert werden, daß nach der Transformation die Glieder ersten Grades und die Produktglieder fehlen, d. h. daß die Koeffizienten dieser Glieder verschwinden.

Die Entfernung der Glieder ersten Grades ist bereits in § 13, S. 141 ff. behandelt worden; der Vollständigkeit wegen mag aber das Ergebnis noch einmal angeführt werden.

A. Parallelverschiebung. Transformation auf den Mittelpunkt.

Es seien $\alpha \beta \gamma$ die Koordinaten des neuen Anfangspunktes, bezogen auf das alte System und $x_1 y_1 z_1$ die neuen Koordinaten. Die Transformationsformeln sind dann:

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta, \quad z = z_1 + \gamma. \qquad 1)$$

Man bestimme α, β, γ aus den Gleichungen ersten Grades:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + a_{14} &= 0, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma + a_{24} &= 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma + a_{34} &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

und berechne darauf a'_{44} nach der Formel:

$$a'_{44} = a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma + a_{44} \tag{3}$$

oder, nach Einsetzen von α, β, γ aus 2):

$$a'_{44} = \frac{D}{\Delta}, \tag{3a}$$

wo D und Δ die folgenden Determinanten vierten und dritten Grades bedeuten:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

Da $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ usw., so sind die beiden Determinanten symmetrisch. Δ ist übrigens die zu a_{44} zugehörende Unterdeterminante von D.

Die neue Gleichung ist:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + 2a_{23}y_1z_1 + 2a_{31}z_1x_1 \\ + 2a_{12}x_1y_1 + a'_{44} = 0. \end{aligned} \tag{II}$$

Die Glieder ersten Grades sind verschwunden und die Konstante a_{44} ist durch eine andere Konstante a'_{44} ersetzt worden. Die Koeffizienten der Glieder zweiten Grades aber sind *unverändert* geblieben.

B. Drehung. Transformation auf die Hauptachsen.

Die nun zu stellende Forderung ist folgende:

Gegeben eine beliebige homogene Funktion zweiten Grades in $x_1 y_1 z_1$:

$$\begin{aligned} F(x_1y_1z_1) \equiv a_{11}x_1^2 + a_{22}y_1^2 + a_{33}z_1^2 + 2a_{23}y_1z_1 \\ + 2a_{31}z_1x_1 + 2a_{12}x_1y_1. \end{aligned} \tag{5}$$

Dieselbe soll durch eine orthogonale Substitution der $x_1 y_1 z_1$ in ξ, η, ζ gemäß den Gleichungen 3), § 3 oder 3a), § 3):*

*) Die neun Koeffizienten dieser Substitution sind im folgenden mit deutschen Lettern bezeichnet worden, um jeder Verwechselung mit den Koeffizienten a_{11}, a_{12} . . . vorzubeugen.

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x_1 &= \mathfrak{a}_1\xi + \mathfrak{a}_2\eta + \mathfrak{a}_3\zeta; \\ y_1 &= \mathfrak{b}_1\xi + \mathfrak{b}_2\eta + \mathfrak{b}_3\zeta; \\ z_1 &= \mathfrak{c}_1\xi + \mathfrak{c}_2\eta + \mathfrak{c}_3\zeta; \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} \xi &= \mathfrak{a}_1 x_1 + \mathfrak{b}_1 y_1 + \mathfrak{c}_1 z_1. \\ \eta &= \mathfrak{a}_2 x_1 + \mathfrak{b}_2 y_1 + \mathfrak{c}_2 z_1. \\ \zeta &= \mathfrak{a}_3 x_1 + \mathfrak{b}_3 y_1 + \mathfrak{c}_3 z_1. \end{aligned} \tag{6}$$

in die Form:

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2. \tag{7}$$

in welcher die Produktglieder fehlen, übergeführt werden.

Dieses Problem spielt, analytisch aufgefaßt und auch von drei Variablen auf eine beliebige Anzahl ausgedehnt, in vielen Zweigen der Mathematik, sowie in zahlreichen Anwendungen (z. B. in der Theorie der freien Achsen, in der Theorie der säkularen Variationen der Elemente der Planetenbahnen, in der Theorie der Hauptdrucke und Hauptdilatationen bei der elastischen Deformation) eine große und wichtige Rolle. Es hat auch eine außerordentliche Fülle von Anregungen zu ausgezeichneten analytischen Untersuchungen gegeben. und wenn auch hier selbstverständlich der einfachste und kürzeste Weg zur Lösung beschritten worden ist, so wird sich doch Gelegenheit bieten, einige derselben zu berühren.

Es ist an sich gleichgültig, ob man davon ausgeht, daß 5) durch 6a) in 7) übergeführt werden soll, oder ob man umgekehrt versucht, die Form 7) durch 6b) in 5) zu verwandeln. Beide Ansätze müssen zuletzt zum selben Ziele führen; hier ist der letztere gewählt worden, weil er geringeren Aufwand von Rechnung erfordert.

Setzt man 6b) in 7) ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \zeta) &\equiv \lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 \\ &\equiv \lambda_1(\mathfrak{a}_1 x_1 + \mathfrak{b}_1 y_1 + \mathfrak{c}_1 z_1)^2 + \lambda_2(\mathfrak{a}_2 x_1 + \mathfrak{b}_2 y_1 + \mathfrak{c}_2 z_1)^2 \\ &\qquad + \lambda_3(\mathfrak{a}_3 x_1 + \mathfrak{b}_3 y_1 + \mathfrak{c}_3 z_1)^2 \\ &\equiv F(x_1 y_1 z_1). \end{aligned}$$

Werden die Quadrate entwickelt, so löst sich diese Identität in die folgenden sechs Gleichungen auf:

$$\begin{aligned} &1)\ a_{11} = \lambda_1\mathfrak{a}_1^2 + \lambda_2\mathfrak{a}_2^2 + \lambda_3\mathfrak{a}_3^2, && 4)\ a_{23} = \lambda_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 + \lambda_2\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_2 + \lambda_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3. \\ &2)\ a_{22} = \lambda_1\mathfrak{b}_1^2 + \lambda_2\mathfrak{b}_2^2 + \lambda_3\mathfrak{b}_3^2, && 5)\ a_{31} = \lambda_1\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_1 + \lambda_2\mathfrak{c}_2\mathfrak{a}_2 + \lambda_3\mathfrak{c}_3\mathfrak{a}_3, \\ &3)\ a_{33} = \lambda_1\mathfrak{c}_1^2 + \lambda_2\mathfrak{c}_2^2 + \lambda_3\mathfrak{c}_3^2, && 6)\ a_{12} = \lambda_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \lambda_2\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \lambda_3\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese sechs Gleichungen 8) enthalten vorläufig zwölf Unbekannte, nämlich die drei Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3 der transformierten Form 7) und die neun Koeffizienten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ ... der

orthogonalen Substitution 6). Da letztere aber, wie in § 3 gezeigt, durch drei voneinander unabhängige Größen. z. B. φ, ψ, ϑ ausgedrückt werden können, so bleiben nur sechs Unbekannte. Also sechs Gleichungen und sechs Unbekannte! Das Problem ist bestimmt, d. h. weder unbestimmt, noch überbestimmt.

Die Einführung von φ, ψ, ϑ nach 10), § 3 in 8) empfiehlt sich aber ganz und gar nicht. Viel eher läßt sich vermuten, daß die Relationen des § 3 zwischen den neun Richtungskosinus durch geschickte Anwendung zur Vereinfachung des Systems 8) dienen können. In der Tat bietet sich hierzu günstige Gelegenheit, wenn man diejenigen Gleichungen zusammenstellt, welche z. B. die drei Koeffizienten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ enthalten, also 8_1), 8_6) und 8_5), sie der Reihe nach mit $\mathfrak{a}_1$. $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{c}_1$ multipliziert und addiert. Man erhält:

$$\begin{aligned} &a_{11}\mathfrak{a}_1 + a_{21}\mathfrak{b}_1 + a_{31}\mathfrak{c}_1 \\ &= \lambda_1\mathfrak{a}_1(\mathfrak{a}_1^2 + \mathfrak{b}_1^2 + \mathfrak{c}_1^2) + \lambda_2\mathfrak{a}_2(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2) \\ &\quad + \lambda_3\mathfrak{a}_3(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_3). \end{aligned}$$

Also nach 4) und 5), § 3, S. 28 überraschend einfach:

$$a_{11}\mathfrak{a}_1 + a_{21}\mathfrak{b}_1 + a_{31}\mathfrak{c}_1 = \lambda_1\mathfrak{a}_1. \tag{9}$$

Solcher Gleichungen kann man offenbar durch analoge Umformungen im ganzen neun bilden. Denn multipliziert man 8_1), 8_6) und 8_5) mit $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ oder mit $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$. $\mathfrak{c}_3$ und addiert, so werden zwei Gleichungen gebildet, die aus 9) entstehen. wenn in der Reihe $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, λ_1 der Index 1 durch 2 oder 3 ersetzt wird. Dann aber kann man dieselben Operationen an 8_2), 8_4) und 8_6), sowie an 8_3), 8_4) und 8_5) ausüben und erhält so in der Tat neun Gleichungen von der Form 9).

Dieselben zerfallen in drei Gruppen. Die erste enthält $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und λ_1, die zweite $\mathfrak{a}_2$. $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ und λ_2, die dritte $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$ und λ_3. Sie stimmen alle drei in ihrem Bau vollkommen überein, nur daß eben in den Koeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und λ einmal der Index 1, dann 2, dann 3 zu setzen ist. Läßt man also diesen Index vorläufig ganz fort, schreibt also einfach $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und λ, und bringt alle Glieder auf die linke Seite, so erhält man dreimal das System von drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\,\mathfrak{a} + a_{12}\mathfrak{b} + a_{13}\mathfrak{c} &= 0, \\ a_{21}\mathfrak{a} + (a_{22} - \lambda)\,\mathfrak{b} + a_{23}\mathfrak{c} &= 0, \\ a_{31}\mathfrak{a} + a_{32}\mathfrak{b} + (a_{33} - \lambda)\,\mathfrak{c} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

wo mithin statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, λ der Reihe nach zu setzen ist:

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \lambda_1;\quad \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{c}_2,\ \lambda_2;\quad \mathfrak{a}_3,\ \mathfrak{b}_3,\ \mathfrak{c}_3,\ \lambda_3. \qquad 11)$$

Wird noch die Gleichung:

$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = 1 \qquad 12)$$

hinzugefügt, so liegt in 10) und 12) ein vollständiges System von vier Gleichungen mit vier Unbekannten vor, das für eine jede der drei Reihen 11) gelten muß.

Das ist wohl schon eine sehr erhebliche Vereinfachung des Problems, da jetzt nur noch vier Gleichungen mit vier Unbekannten zu behandeln sind. Aber die Gleichungen 10) sind sogar linear in bezug auf die Substitutionskoeffizienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, während die ursprünglichen Gleichungen 8) vom zweiten Grade waren. Außerdem sind die Gleichungen 10) auch noch homogen und beziehen sich somit nur auf die Verhältnisse $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c}$.

Daraus folgt weiter, daß die drei Gleichungen 10) in bezug auf $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nicht unabhängig voneinander sein können, weil sie sonst nur die selbstverständliche Lösung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0$ haben würden, die aber nach 12) für uns keine Lösung ist. Es muß vielmehr jede von ihnen eine Folge der beiden anderen sein und hierfür ist nach I, § 20 die notwendige Bedingung, daß die Determinante aus den neun Koeffizienten in 10) verschwinde, also:

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \qquad 13)$$

Diese Gleichung enthält nur noch die Unbekannte λ und sie muß nach dem Vorangegangenen sowohl für $\lambda = \lambda_1$, als auch für $\lambda = \lambda_2$, als auch für $\lambda = \lambda_3$ gelten. Andererseits wird sie, wenn man die Determinante entwickelt, vom dritten Grade und hat somit auch wirklich drei Wurzeln. Daher endlich:

λ_1, λ_2, λ_3, d. h. die drei Koeffizienten der neuen Form 7) sind die drei Wurzeln ein und derselben kubischen Gleichung 13).

Man bezeichnet sie als **Resolvente** des Problems. Sie sei gelöst. Setzt man nunmehr für λ eine der Wurzeln ein, so können die drei Gleichungen 10) nicht mehr voneinander

11*

unabhängig sein. Irgend zwei von ihnen geben sofort das gesuchte Verhältnis $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$. So etwa die beiden ersten:

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\lambda & a_{23} \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \qquad 14)$$
$$= m : n : p$$

und damit nach 12):

$$\mathfrak{a} = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \quad \mathfrak{b} = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \qquad 15)$$
$$\mathfrak{c} = \frac{p}{\pm\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

d. h. die Richtung der entsprechenden Hauptachse.

Damit ist das Problem der Transformation in „drei Quadrate" durch eine orthogonale Substitution gelöst. Die kubische Gleichung 13) liefert die drei Koeffizienten der neuen Form, während die Gleichungen 10) und 12) bzw. 14) und 15) die Richtungen der neuen Koordinatenachsen, d. h. der Hauptachsen der Fläche ergeben.

Diese Untersuchung über die Transformation in drei Quadrate ist so geführt worden, daß sie sofort auch auf n Quadrate übertragen werden kann. Die Lösung selbst ist von äußerster Einfachheit und Klarheit; aber noch sind berechtigte Zweifel zu zerstreuen, ob sie auch in allen Fällen gültig bleibt.

Es sind ihrer drei, nämlich: Erster Einwurf. Die Bestimmung der λ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ stützt sich lediglich auf die Gleichungen 10), 12), 13), bzw. auf die aus ihnen abgeleiteten Folgerungen 13), 14) und 15). Danach wird die Richtung jeder Achse ganz unabhängig von der der anderen Achsen ermittelt. Stehen diese dann nun auch tatsächlich aufeinander senkrecht, wie es sein soll?

Um sich hiervon zu überzeugen, wird man wohl nicht umhin können, aus den drei Systemen 10), die durch Einsetzen der Reihen 11) entstehen, die Bedingung des Senkrechtstehens abzuleiten. Man setze also zunächst in 10) die erste Reihe $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \lambda_1$, multipliziere dann mit $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{c}_2$ und addiere. Es folgt:

$$a_{11}\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + a_{22}\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 + a_{33}\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2 + a_{23}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{c}_1\mathfrak{b}_2) + a_{31}(\mathfrak{c}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2)$$
$$+ a_{12}(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_2) = \lambda_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2).$$

Nun setze man umgekehrt in 10) die zweite Reihe $\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2 \mathfrak{c}_2 \lambda_2$ ein, multipliziere mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und addiere; so entsteht eine neue Formel von ganz gleichem Bau, nur daß eben die beiden Indizes der deutschen Buchstaben miteinander vertauscht sind. Dabei bleibt aber die linke Seite, wie man sieht, durchaus unverändert und auch auf der rechten ist nur λ_1 durch λ_2 zu ersetzen. Durch Subtraktion folgt also:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2) = 0$$

oder, wenn λ_1 und λ_2 zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung 13) sind:

$$\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2 = 0.$$

Dies ist aber nach 15), § 1 die Bedingung des Senkrechtstehens. Daher:

Wenn die drei Wurzeln λ_1, λ_2, λ_3 der kubischen Gleichung 13) voneinander verschieden sind, so stehen die drei durch 15) bestimmten Richtungen in der Tat aufeinander senkrecht.

Man kann dann aus den drei Systemen 10) auf umgekehrtem Wege wieder zu 8), d. h. zu den Ausgangsformeln für die Umwandlung in drei Quadrate zurückgelangen.

Zweiter Einwurf. Wenn die kubische Gleichung 13) imaginäre, oder vielmehr komplexe Wurzeln hätte, so würden auch die zugehörigen Achsenrichtungen imaginär werden. Die Transformation wäre auf reelle Weise nicht möglich, die Lösung also in diesem Falle geometrisch wertlos!

Dem gegenüber hat man auf verschiedene, äußerst scharfsinnige Weisen dargetan, daß gerade diese Gleichung 13) niemals komplexe, sondern immer nur reelle Wurzeln haben kann, vorausgesetzt natürlich, daß a_{11}, a_{12} ... reelle, wenn auch sonst beliebige Werte haben. Der folgende geniale und sehr einfache Beweis rührt von Cauchy her.

Bekanntlich treten komplexe Wurzeln bei Gleichungen mit reellen Koeffizienten immer nur paarweise und konjugiert auf. Es seien also $\lambda_1 = p + qi$ und $\lambda_2 = p - qi$ zwei solche Wurzeln. Natürlich werden auch die zugehörigen Richtungskosinus komplex, und zwar ebenfalls konjugiert komplex, also von der Form:

$$\mathfrak{a}_1 = P_1 + Q_1 i, \quad \mathfrak{b}_1 = P_2 + Q_2 i, \quad \mathfrak{c}_1 = P_3 + Q_3 i,$$
$$\mathfrak{a}_2 = P_1 - Q_1 i, \quad \mathfrak{b}_2 = P_2 - Q_2 i, \quad \mathfrak{c}_2 = P_3 - Q_3 i.$$

Mit diesen Werten erhält die Bedingung $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2+\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2+\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2=0$ die Gestalt:

$$P_1^2+Q_1^2+P_2^2+Q_2^2+P_3^2+Q_3^2=0$$

und zerfällt daher, da sämtliche P und Q reell sein sollen, in die sechs Gleichungen:

$$P_1=P_2=P_3=Q_1=Q_2=Q_3=0.$$

Daher auch:

$$\mathfrak{a}_1=\mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}_1=\mathfrak{a}_2=\mathfrak{b}_2=\mathfrak{c}_2=0.$$

Dies widerspricht aber der ausdrücklichen Verwerfung der selbstverständlichen Lösung $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$ des Systems 10). Die Gleichung 13) kann also nur reelle Wurzeln haben.

Dritter Einwurf. Wenn die Gleichung 13) zwei gleiche Wurzeln hat, etwa $\lambda_1=\lambda_2$, so scheint es doch fast, als ob nach 10) und 12) auch $\mathfrak{a}_1=\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}_2$ sein müsse und daher die entsprechenden Achsen nicht mehr senkrecht aufeinanderstehen, sondern zusammenfallen!

Diesen dritten und letzten Einwurf ganz zu vernichten, hat die größte Anstrengung gekostet und (von 3 auf n erweitert) die tiefsten Untersuchungen erfordert, welche hier für $n=3$ ergeben haben, daß nach Einsetzen einer solchen doppelten Wurzel der Gleichung 13) in 10) diese drei Gleichungen nicht mehr, wie im allgemeinen Falle zwei, sondern nur noch eine unabhängige Gleichung bedeuten, oder daß diese Gleichungen sich dann nur noch durch konstante Faktoren voneinander unterscheiden. Es bleibt also nur eine Gleichung übrig von der Form:

$$A\mathfrak{a}+B\mathfrak{b}+C\mathfrak{c}=0,$$

welche unzählig viele, in einer Ebene liegende Richtungen ergibt [siehe 15 b), § 1], aus denen man irgend zwei zueinander senkrechte nach Belieben auswählen darf. Dann ist die neue Form:

$$\lambda_1(\xi^2+\eta^2)+\lambda_3\zeta^2,$$

und die Fläche erweist sich als Umdrehungsfläche*).

Der strenge Beweis dieses an sich recht einleuchtenden Resultats ist aber, wie gesagt, nicht leicht und soll daher auch nur deswegen geführt werden, weil dabei noch für die Fortsetzung der Diskussion im nächsten Paragraphen etwas abfällt.

*) Siehe den besonderen Fall in § 14.

Er stützt sich auf die folgenden Eigenschaften symmetrischer Determinanten. Es sei:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

eine symmetrische Determinante, also $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Ferner seien A_{11}, A_{12} ... die zu a_{11}, a_{12} ... gehörenden Unterdeterminanten, also auch:

$$A_{12} = A_{21}, \quad A_{23} = A_{32}, \quad A_{31} = A_{13}.$$

Dann gilt folgender Satz:

Wenn $\varDelta = 0$, so haben die zu den Diagonalelementen a_{11}, a_{22}, a_{33} gehörenden Unterdeterminanten A_{11}, A_{22}, A_{33} dasselbe Vorzeichen. (Die a_{pq} selbstverständlich reell.)

Beweis: Für $\varDelta = 0$ gilt nach I, § 20 die Proportion:

$$A_{11} : A_{12} : A_{13} = A_{21} : A_{22} : A_{23} = A_{31} : A_{32} : A_{33},$$

also im besonderen:

$$A_{11} : A_{12} = A_{21} : A_{22},$$

d. h.

$$A_{11} \cdot A_{22} = A_{12} \cdot A_{21}$$

oder (da $A_{12} = A_{21}$)

$$A_{11} \cdot A_{22} = (A_{12})^2.$$

$(A_{12})^2$ ist aber positiv oder höchstens $= 0$, also können A_{11} und A_{22} nicht verschiedene Vorzeichen haben. Ein gleiches folgt für A_{11} und A_{33} sowie für A_{22} und A_{33}. Q. e. d.

Aus der letzten Gleichung ist ferner der Schluß zu ziehen:

Wenn $\varDelta = 0$ und eine zu einem Diagonalelement zugehörende Unterdeterminante ebenfalls $= 0$, z. B. $A_{11} = 0$, so sind alle in derselben Reihe stehenden Unterdeterminanten $= 0$, d. h. auch $A_{12} = A_{13} = 0$.

Und endlich:

Wenn $\varDelta = 0$ und $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, so ist auch $A_{12} = A_{23} = A_{31} = 0$, d. h. es verschwinden alle Unterdeterminanten von $\varDelta$.

Mit Hilfe dieser Sätze gelingt nun der gesuchte Beweis wie folgt. Die Gleichung 13) erhält nach Entwickelung der Determinante, wenn noch die Vorzeichen aller Glieder gewechselt werden, die Gestalt:

$$\lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda t - \varDelta = 0, \qquad \textbf{13a)}$$

wo s und t folgende Bedeutung haben:

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad 16)$$

$$t = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2, \qquad 17)$$

während $\varDelta$ die schon in 4) angegebene Determinante ist.

Sind λ_1, λ_2, λ_3 die drei Wurzeln, so ist also identisch:

$$\lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda t - \varDelta \equiv (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3).$$

Daher:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= s, \\ \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 &= t, \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \varDelta. \end{aligned} \qquad 18)$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2$ also:

$$2\lambda_1 + \lambda_3 = s, \quad 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^2 = t,$$

und nach Elimination von λ_3:

$$3\lambda_1^2 - 2\lambda_1 s + t = 0,$$

d. h. eine etwaige doppelte Wurzel von 13a) genügt auch der Gleichung:

$$3\lambda^2 - 2\lambda s + t = 0 \qquad 18a)$$

[die auch aus 13a) durch Differentiieren entstehen würde]. Nach Einsetzen der Werte von s und t nimmt aber die letztere Gleichung 18a) bei ganz geringer Umformung die Gestalt an:

$$\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33}-\lambda & a_{31} \\ a_{13} & a_{11}-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 19)$$

und nun können die vorhin abgeleiteten Sätze sofort angewendet werden. Denn die in 19) auftretenden drei Determinanten sind die drei zu den Diagonalelementen der symmetrischen und verschwindenden Determinante 13) gehörenden Unterdeterminanten. Sie können also nur dasselbe Vorzeichen haben, oder zum Teil oder auch alle $= 0$ sein. Da aber nach 19) ihre Summe $= 0$ sein soll, so muß hier das letzte eintreten. Dann aber sind, wie gezeigt, **alle** Unterdeterminanten von 13) $= 0$, d. h. die drei Gleichungen 10) werden, von konstanten Faktoren abgesehen, identisch. Es muß also sein:

$$a_{11} - \lambda : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} - \lambda : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33} - \lambda,$$

oder wenn man den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse mit $u:v:w$ bezeichnet, nach Einführung dreier Faktoren k_1, k_2, k_3:

$$\begin{aligned} a_{11} - \lambda &= k_1 u, & a_{12} &= k_1 v, & a_{13} &= k_1 w, \\ a_{21} &= k_2 u, & a_{22} - \lambda &= k_2 v, & a_{23} &= k_2 w, \\ a_{31} &= k_3 u, & a_{32} &= k_3 v, & a_{33} - \lambda &= k_3 w. \end{aligned}$$

Da nun

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21},$$

so folgt ferner:

$$k_1 : k_2 : k_3 = u : v : w$$

und man kann setzen:

$$k_1 = ku, \quad k_2 = kv, \quad k_3 = kw.$$

Also endlich:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \lambda + ku^2, & a_{22} = \lambda + kv^2, & a_{33} = \lambda + kw^2, \\ a_{23} = kvw, & a_{31} = kwu, & a_{12} = kuv. \end{array}$$

Diese Formeln sind aber identisch mit den Formeln 18), § 14 für eine Rotationsfläche, wenn statt a, b, c dort gesetzt wird u, v, w.

Damit ist also auch der dritte Einwurf zurückgeschlagen.

Sollten endlich alle drei Wurzeln der Gleichung 18a) einander gleich sein, also $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so folgt aus 18)

$$3\lambda = s, \quad 3\lambda^2 = t, \quad \text{also} \quad s^2 - 3t = 0,$$

oder nach Einführung von s und t aus 16) und 17):

$$[a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 - a_{22}a_{33} - a_{33}a_{11} - a_{11}a_{22}] \\ + 3a_{23}^2 + 3a_{31}^2 + 3a_{12}^2 = 0.$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist aber identisch mit:

$$\frac{1}{2}[(a_{22} - a_{33})^2 + (a_{33} - a_{11})^2 + (a_{11} - a_{22})^2].$$

Für reelle Werte der Koeffizienten kann daher die Bedingung $s^2 - 3t = 0$ nur erfüllt werden, wenn:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} (= \lambda)$$

und

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0,$$

d. h. wenn die Fläche eine Kugel ist. Dann verschwindet das System 10) identisch, wie es ja auch sein muß, da nunmehr jede Achse eine Hauptachse ist.

Die anfangs vielleicht berechtigten Zweifel an einer in allen Fällen möglichen orthogonalen Transformation in drei Quadrate sind also vollständig zerstreut. Sowohl die drei neuen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ als auch die drei Achsenrichtungen sind stets reell, und der Ausnahmefall, daß zwei der λ einander gleich sind, bietet nur die Möglichkeit unendlich vieler solcher Transformationen, da dann die Fläche eine Umdrehungsfläche oder, wenn gar alle drei λ gleich sind, eine Kugel ist.

Bestimmung der Art der Fläche. Nach Ausführung der Parallelverschiebung und der Drehung ist die gegebene Gleichung auf die Form reduziert worden:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + \lambda_3 \zeta^2 + a'_{44} = 0 \qquad \text{III)}$$

und die Art der Fläche [ob I), II), III) oder I a) in § 14] hängt nur noch von den Vorzeichen der vier Koeffizienten λ_1, λ_2, λ_3, a'_{44} ab. Sind sie z. B. alle vier positiv oder alle vier negativ, so liegt I a), ein imaginäres Ellipsoid, vor. Sind λ_1, λ_2, λ_3 positiv, a'_{44} negativ oder umgekehrt, so ist die Fläche ein reelles Ellipsoid I) usw.

Da $a'_{44} = \frac{D}{\varDelta}$ und nach 18) $\varDelta = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3$, so erhält III) nach Division mit $-a'_{44}$ [um die Konstante in Übereinstimmung mit den Formen I), II), III), I a) $= -1$ zu machen] die Gestalt:

$$\frac{\xi^2}{\frac{\lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot D}{-\varDelta^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{\lambda_3 \cdot \lambda_1 \cdot D}{-\varDelta^2}} + \frac{\zeta^2}{\frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot D}{-\varDelta^2}} - 1 = 0. \qquad \text{IV)}$$

In bezug auf die Vorzeichen der Produkte $\lambda_2 \cdot \lambda_3$, $\lambda_3 \cdot \lambda_1$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ sind nur die folgenden zwei Fälle möglich. Entweder sind sie alle drei positiv, wenn nämlich λ_1, λ_2 und λ_3 alle drei dasselbe Vorzeichen haben, oder es sind zwei negativ, das dritte positiv, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 nicht alle drei dasselbe Vorzeichen haben. Da nun $(\varDelta)^2$ an sich positiv ist, so entnimmt man aus der Formel IV) bei Vergleichung mit den Formen I), II), III), I a), § 14 die folgenden Kriterien:

1. λ_1, λ_2 und λ_3 haben alle drei dasselbe Vorzeichen, D negativ, so I) (reelles Ellipsoid),
2. λ_1, λ_2 und λ_3 haben alle drei dasselbe Vorzeichen, D positiv, so I a) (imaginäres Ellipsoid),
3. λ_1, λ_2 und λ_3 haben nicht alle dasselbe Vorzeichen, D negativ, so III) (zweischaliges Hyperboloid),
4. λ_1, λ_2 und λ_3 haben nicht alle dasselbe Vorzeichen, D positiv, so II) (einschaliges Hyperboloid).

20)

Um aber die Vorzeichen von λ_1, λ_2 und λ_3 zu ermitteln, ist es gar nicht erst nötig, die kubische Gleichung 13a) aufzulösen. Denn man kann sofort die berühmte Zeichenregel von Cartesius anwenden, welche folgendermaßen lautet*):

*) Derjenige Leser, dem sie bisher nicht bekannt sein sollte, suche sie für $n = 3$ selbständig zu beweisen.

Wird eine Gleichung n^{ten} Grades nach fallenden (oder **steigenden) Potenzen von x geordnet:**

$$a x^n + b x^{n-1} + c x^{n-2} + d x^{n-3} \ldots = 0,$$

so sind höchstens so viel positive Wurzeln vorhanden, wie Zeichenwechsel in den Koeffizienten $a, b, c, d \ldots$ und höchstens so viel negative Wurzeln, wie Zeichenfolgen. Diese Höchstzahl wird erreicht, wenn die Wurzeln sämtlich reell sind.

Das letztere ist hier der Fall für die Gleichung 13a):

$$\lambda^3 - s\lambda^2 + t\lambda - \Delta = 0. \qquad \textbf{13a)}$$

λ_1, λ_2 und λ_3 mithin alle drei positiv, wenn s, t und Δ positiv; alle drei negativ, wenn t positiv, s und Δ negativ. λ_1, λ_2 und λ_3 haben aber verschiedene Vorzeichen, wenn t negativ, oder wenn s und Δ entgegengesetzte Vorzeichen haben, oder auch wenn beides der Fall ist, da es dann in der Reihe der Koeffizienten:

$$1, \quad -s, \quad t, \quad -\Delta$$

sowohl Zeichenwechsel, als auch Zeichenfolgen gibt. Die Kriterien 20) sind also durch die nun folgenden zu ersetzen:

1. Reelles Ellipsoid I), wenn t positiv, s und Δ beide positiv oder beide negativ, D negativ,
2. Imaginäres Ellipsoid Ia), wenn t positiv, s und Δ beide positiv oder beide negativ, D positiv,
3. Zweischaliges Hyperboloid III), wenn t negativ, oder wenn s und Δ ungleiche Vorzeichen haben, oder wenn beides der Fall, D negativ,
4. Einschaliges Hyperboloid II), wenn t negativ, oder wenn s und Δ ungleiche Vorzeichen haben, oder wenn beides der Fall, D positiv.

21)

Wenn es also nur darauf ankommt, die Art der durch eine gegebene Gleichung 1) gegebenen Fläche zu erkennen, so hat man nichts weiter zu tun, als die vier Größen:

$$s, \quad t, \quad \Delta, \quad D \qquad \textbf{22)}$$

zu berechnen, und auch dies nur so weit, bis ihre Vorzeichen festgestellt sind. Denn diese geben dann nach 21) mit unfehlbarer Sicherheit die Entscheidung.

Anmerkung: Die vier Größen 22) sind die sogenannten Invarianten der gegebenen Gleichung I) für eine beliebige rechtwinklige Koordinatentransformation, da sich ihre Werte,

wie man hinterher ohne große Mühe zeigen kann, bei keiner solchen Transformation ändern. Dabei wird aber vorausgesetzt, daß die Gleichung nicht gelegentlich mit einem Faktor k multipliziert werde, denn dann werden s, t, Δ und D, da sie in bezug auf a_{11}, a_{12} ... homogen und der Reihe nach vom ersten, zweiten, dritten und vierten Grade sind, mit k, k^2, k^3 und k^4 multipliziert.

Übungsaufgaben.

1. Ist es stets möglich, aus einer Gleichung zweiter Ordnung die rein quadratischen Glieder zu entfernen? Welche Bedingung muß erfüllt sein? Was folgt aus ihr für den Asymptotenkegel der Fläche?

2. Man mache den Ansatz $t = 0$ und ziehe Folgerungen für den Asymptotenkegel der Fläche.

3. Unter der Voraussetzung, daß die allgemeine Gleichung I) ein Ellipsoid darstelle, das Volumen desselben durch die zehn Koeffizienten $a_{11}, a_{12} \ldots a_{44}$ auszudrücken. $\left(\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi abc.\right)$

---

§ 16.

Ausnahmefälle zur Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Durchrechnung eines numerischen Beispiels.

Die Übersicht über die Ausnahmefälle wird sehr erleichtert, wenn man die Reihenfolge der beiden Transformationen A und B, § 15 der gegebenen Gleichung:

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx \\ &+ 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \qquad \text{I)}$$

umkehrt, also erst dreht und dann parallel verschiebt. Der dabei einzuschlagende Gang ist kurz folgender:

A′. Drehung.

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{a}_1 x_1 + \mathfrak{a}_2 y_1 + \mathfrak{a}_3 z_1, \\ y &= \mathfrak{b}_1 x_1 + \mathfrak{b}_2 y_1 + \mathfrak{b}_3 z_1, \\ z &= \mathfrak{c}_1 x_1 + \mathfrak{c}_2 y_1 + \mathfrak{c}_3 z_1. \end{aligned} \qquad \text{1)}$$

Dann transformieren sich die Glieder zweiten Grades untereinander und die Glieder ersten Grades untereinander: jede Gruppe unabhängig von der anderen. Nach den kritischen

Untersuchungen des vorigen Paragraphen ist es daher auch hier immer möglich, die Glieder zweiten Grades in drei Quadrate:

$$\lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 y_1{}^2 + \lambda_3 z_1{}^2$$

zu verwandeln, wobei die zugehörigen Formeln des Abschnittes B wörtlich entnommen werden müssen. Die Glieder ersten Grades transformieren sich in andere Glieder ersten Grades:

$$2\,a'_{14} x_1 + 2\,a'_{24} y_1 + 2\,a'_{34} z_1.$$

Die Ausdrücke für a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} findet man ohne Mühe:

$$\begin{aligned} a'_{14} &= a_{14}\mathfrak{a}_1 + a_{24}\mathfrak{b}_1 + a_{34}\mathfrak{c}_1, \\ a'_{24} &= a_{14}\mathfrak{a}_2 + a_{24}\mathfrak{b}_2 + a_{34}\mathfrak{c}_2, \\ a'_{34} &= a_{14}\mathfrak{a}_3 + a_{24}\mathfrak{b}_3 + a_{34}\mathfrak{c}_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Konstante a_{44} bleibt unverändert. Die transformierte Gleichung ist daher:

$$\lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 y_1{}^2 + \lambda_3 z_1{}^2 + 2\,a'_{14} x_1 + 2\,a'_{24} y_1 + 2\,a'_{34} z_1 + a_{44} = 0. \tag{IIa}$$

B′. Parallelverschiebung.

Man setze in IIa):

$$x_1 = \xi + \alpha', \quad y_1 = \eta + \beta', \quad z_1 = \zeta + \gamma'. \tag{3}$$

(Die Verschiebungen sind mit α', β', γ' bezeichnet worden, um Verwechselungen mit den alten Verschiebungen α, β, γ in A, § 15 vorzubeugen.)

Die Gleichung IIa) wird dann:

$$\begin{aligned} &\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + 2\,(a'_{14} + \lambda_1\alpha')\,\xi + 2\,(a'_{24} + \lambda_2\beta')\,\eta \\ &+ 2\,(a'_{34} + \lambda_3\gamma')\,\zeta + [\lambda_1(\alpha')^2 + \lambda_2(\beta')^2 + \lambda_3(\gamma')^2 + 2\,a'_{14}\alpha' \\ &+ 2\,a'_{24}\beta' + 2\,a'_{34}\gamma' + a_{44}] = 0. \end{aligned} \tag{IIb}$$

Die Glieder ersten Grades verschwinden, wenn:

$$\alpha' = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \quad \beta' = -\frac{a'_{24}}{\lambda_2}, \quad \gamma' = -\frac{a'_{34}}{\lambda_3}. \tag{4}$$

Darauf wird die neue Konstante:

$$a'_{44} = -\frac{a'_{14}{}^2}{\lambda_1} - \frac{a'_{24}{}^2}{\lambda_2} - \frac{a'_{34}{}^2}{\lambda_3} + a_{44} \tag{5}$$

und man erhält abermals die Gleichung:

$$\lambda_1\xi^2 + \lambda_2\eta^2 + \lambda_3\zeta^2 + a'_{44} = 0, \tag{III}$$

woraus übrigens folgt, daß der Wert von a'_{44} aus 5) mit dem aus der früheren Formel:

$$a'_{44} = \frac{D}{\Delta} \tag{6}$$

errechneten übereinstimmen muß.

Die Überführung von I) in IIa) durch 1) ist, wie erwiesen, stets möglich. Man kann daher beim Aufsuchen von Ausnahmefällen die einfachere Form IIa) voraussetzen und sich so die Untersuchung zunächst wesentlich erleichtern.

Es sei also die Gleichung IIa) gegeben. Die Formeln 4) lehren, daß die Transformation 3) nur dann unmöglich werden kann, wenn λ_1 oder λ_2 oder λ_3 verschwindet. Es sei dies nicht der Fall, so lehrt die Form III), daß die Fläche ein Kegel ist, wenn $a'_{44} = 0$, und zwar:

Reeller Kegel IV), § 14, wenn $a'_{44} = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht alle dasselbe Vorzeichen.
Imaginärer Kegel IVa), § 14, wenn $a'_{44} = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ alle dasselbe Vorzeichen. 7)

Andere Ausnahmefälle gibt es nicht, wenn keiner der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ verschwindet, und man hat also nur noch die Annahme zu prüfen, daß zunächst einer, etwa $\lambda_3 = 0$ ist:

$$\lambda_3 = 0.$$

Es fehlt dann in IIa) das dritte Glied $\lambda_3 z_1^2$. Macht man auch hier den Ansatz einer Parallelverschiebung 3), so bleibt nach IIb) der Koeffizient von ζ unverändert. Dagegen können die Koeffizienten von ξ und $\eta = 0$ gesetzt werden, worauf α' und β' wie vorhin durch die Formeln bestimmt sind:

$$\alpha' = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \quad \beta' = -\frac{a'_{24}}{\lambda_2}. \tag{8}$$

Da noch γ' zur Verfügung steht, wird man die Konstante in IIb) zum Verschwinden bringen.

Man erhält dann:

$$\gamma' = -\frac{-\frac{a'^2_{14}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{24}}{\lambda_2} + a_{44}}{2\,a'_{34}} \tag{9}$$

und an Stelle von III) tritt nun die Gleichung:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + 2\,a'_{34} \zeta = 0. \tag{IIIa}$$

Die Fläche ist also nach V) oder VI), § 14 ein Paraboloid, und zwar:

Elliptisches Paraboloid, wenn $\lambda_3 = 0$ und λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen haben.
Hyperbolisches Paraboloid, wenn $\lambda_3 = 0$ und λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben. **10)**

Ein Ausnahmefall hiervon tritt wieder ein, wenn $a'_{34} = 0$, da dann nach 9) $\gamma' = \infty$ oder, wenn auch der Zähler in 9) gleich 0 sein sollte, unbestimmt wird. Man setze daher den Fall, daß in IIa):

$$\lambda_3 = 0 \quad \text{und} \quad a'_{34} = 0.$$

Die Gleichung IIa) wird dann:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2\,a'_{14} x_1 + 2\,a'_{24} y_1 + a_{44} = 0. \qquad \textbf{IIc)}$$

Sie enthält nicht mehr die Veränderliche z_1 und stellt also nach § 5 einen Zylinder vor, dessen Kanten zur z_1-Achse parallel sind. Um zu entscheiden, welcher Art dieser Zylinder ist, verschiebe man in der $x_1 y_1$-Ebene parallel:

$$x_1 = \xi + \alpha', \quad y_1 = \eta + \beta' \qquad \textbf{11)}$$

und bestimme, wie vorhin, α' und β' durch die Formeln:

$$\alpha' = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \quad \beta' = -\frac{a'_{24}}{\lambda_2}.$$

Statt der Gleichung IIIa) entsteht dann als Endgleichung:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + a'_{44} = 0, \qquad \textbf{IIIb)}$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden:

$$a'_{44} = -\frac{a'^2_{14}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{24}}{\lambda_2} + a_{44}. \qquad \textbf{12)}$$

Die Kriterien sind daher:

Reeller elliptischer Zylinder VII), § 14, wenn $\lambda_3 = 0$, $a'_{34} = 0$, λ_1, λ_2 und $(-a'_{44})$ gleiche Vorzeichen.
Imaginärer elliptischer Zylinder VIIa), § 14, wenn $\lambda_3 = 0$, $a'_{34} = 0$, λ_1, λ_2 und a'_{44} gleiche Vorzeichen.
Hyperbolischer Zylinder VIII), § 14, wenn $\lambda_3 = 0$, $a'_{34} = 0$, λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen. **13)**

Auszunehmen ist wieder der Fall, daß $a'_{44} = 0$. Dann wird die Gleichung IIIb):

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 = 0 \qquad \textbf{IIIc)}$$

und gibt also zwei Ebenen:

$$\eta = +\xi \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \quad \eta = -\xi \sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \qquad \textbf{14)}$$

Daher:

Zwei sich schneidende reelle Ebenen, wenn $\lambda_3 = 0$, $a'_{34} = 0$, $a'_{44} = 0$ und λ_1 und λ_2 entgegengesetzte Vorzeichen.

Zwei sich schneidende imaginäre Ebenen (d. h. ein unendlich dünner elliptischer Zylinder), wenn $\lambda_3 = 0$, $a'_{34} = 0$, $a'_{44} = 0$, λ_1 und λ_2 dasselbe Vorzeichen. **15)**

Mehr Ausnahmefälle gibt es nicht, wenn nur eine der drei Größen λ_1, λ_2, λ_3 verschwindet. Es seien also zwei, etwa:

$$\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Die Gleichung IIa) wird dann:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\,a'_{14} x_1 + 2\,a'_{24} y_1 + 2\,a'_{34} z_1 + a_{44} = 0. \qquad \textbf{IId)}$$

Man kann jetzt unbeschadet der Allgemeinheit einen der beiden Koeffizienten a'_{24} und $a'_{34} = 0$ setzen. Denn da zwei der $\lambda = 0$, also auch einander gleich sind, so ist die Fläche (wenn auch nur im uneigentlichen Sinne) eine Umdrehungsfläche. Damit stimmt, daß man, ohne die Form IId) zu ändern, noch um die x_1-Achse drehen kann, wobei nur a'_{24} und a'_{34} ihre Werte ändern. Es werde also $a'_{34} = 0$ gesetzt und die Gleichung IId) in der Form angenommen:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\,a'_{14} x_1 + 2\,a'_{24} y_1 + a_{44} = 0. \qquad \textbf{IId)}$$

Nun verschiebe man in der $x_1 y_1$-Ebene parallel:

$$x_1 = \xi + \alpha, \quad y_1 = \eta + \beta,$$

setze:

$$\alpha = -\frac{a'_{14}}{\lambda_1}, \quad \beta = -\frac{-\frac{a'^2_{14}}{\lambda_1} + a_{44}}{2\,a'_{24}},$$

so wird die transformierte Gleichung:

$$\lambda_1 \xi^2 + 2\,a'_{24} \eta = 0. \qquad \textbf{IIId)}$$

Daher:

Parabolischer Zylinder IX), § 14, wenn $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. **16)**

Ein Ausnahmefall tritt wieder ein, wenn schon von vornherein in IId) beide Koeffizienten a'_{24} und a'_{34} verschwinden, also IId) die Form hatte:

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\,a'_{14} x_1 + a_{44} = 0. \qquad \textbf{IIe)}$$

Dann enthält die Gleichung nur noch x_1. Also:

Zwei parallele (reelle oder imaginäre oder zusammenfallende) Ebenen, wenn $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $a'_{24} = 0$, $a'_{34} = 0$. **17)**

Ein anderer Ausnahmefall ist nicht mehr möglich, es sei denn, daß alle drei λ verschwinden. Dann enthält die Gleichung IIa), also auch die gegebene Gleichung I) keine Glieder zweiten Grades. Sie reduziert sich auf den ersten Grad und stellt eine Ebene vor. Will man sie aber auch dann noch als Grenzfall einer Fläche zweiter Ordnung betrachten, so schreibe man die linke Seite als das Produkt:

$$(2\,a'_{14}x + 2\,a'_{24}y + 2\,a'_{34}z + a_{44})\,(0\,x + 0\,y + 0\,z + 1).$$

Die Fläche zerfällt also in die gegebene und in die unendlich ferne Ebene.

Sind gar alle Koeffizienten in I) $= 0$, außer a_{44}, so ist auch diese gegebene Ebene unendlich fern, die Gleichung stellt sozusagen die unendlich ferne Ebene doppelt vor.

Sind endlich alle 10 Koeffizienten $= 0$, so wird die Gleichung zur Identität und hört auf, eine Gleichung, eine Bedingung zu sein.

Die Untersuchung der Ausnahmefälle ist hiermit vollständig erledigt. Wie auch immer eine Gleichung zweiten Grades in x, y, z aussehen mag, die in diesem und dem vorigen Paragraphen durchgeführte „Diskussion" muß die Entscheidung über die Art der Fläche bringen. Und da diese Diskussion nur auf die in § 14 aufgezählten Flächen zweiter Ordnung geführt hat, so gibt es eben keine anderen.

Es ist noch wünschenswert, die Kriterien 7), 10), 13), 15), 16) und 17) von der reduzierten Form IIa) auf die ursprüngliche Form I) zu übertragen. Dies ist in den Hauptfällen 7) und 10) sofort geschehen, da $a'_{44} = \frac{D}{\varDelta}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ Wurzeln der kubischen Gleichung sind [vgl. 13a), § 15, S. 167]:

$$\lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda t - \varDelta = 0. \qquad \textbf{18)}$$

Soll eine Wurzel, etwa λ_3, verschwinden, so muß hiernach $\varDelta = 0$ sein, worauf die beiden andern Wurzeln λ_1 und λ_2 durch Auflösen der quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - \lambda s + t = 0 \qquad \textbf{19)}$$

gefunden werden. Nicht ganz so einfach liegt 13). Es ist zunächst $\varDelta = 0$. Aber auch die zu a_{14}, a_{24} und a_{34} zugehörigen Unterdeterminanten von D müssen verschwinden, weil die Fläche eine ganze Mittellinie hat und die drei Gleichungen 2), § 15 daher nicht voneinander unabhängig sein können. Bei der Entwickelung von D nach den Elementen der vierten Horizontal- oder Vertikalreihe findet man daher $D = 0$, wie auch umgekehrt aus $D = 0$, $\varDelta = 0$ sofort das Verschwinden der drei obengenannten Unterdeterminanten folgt (siehe S. 167). Mehr Schwierigkeiten macht aber die Umwandlung von a'_{44}, da die alte Formel: $a'_{44} = \frac{D}{\varDelta}$ hier nicht anwendbar ist und die neue Formel 12) nur auf Umwegen von der Form IIa) auf I) übertragbar ist. Es bleibt dann nur übrig, die Gleichungen 2) und 3), § 15 wieder aufzunehmen, diesmal aber mit der Maßgabe, daß die Gleichungen 2), § 15 nicht voneinander unabhängig sind und daher zwei von ihnen ausreichen. Man wird daher auch die eine Koordinate des Mittelpunktes, etwa γ, beliebig annehmen und so irgend einen Punkt der Mittellinie bestimmen. Durch Einsetzen in 3) entsteht dann a'_{44}, und zwar, wie sich hinterher leicht zeigen läßt, unabhängig von der Lage dieses Punktes auf der Mittellinie.

Sollen, wie in 16), zwei λ, etwa λ_2 und λ_3, verschwinden, so muß $\varDelta = 0$ und $t = 0$ sein, woraus (nach S. 167) folgt, daß sämtliche Unterdeterminanten von $\varDelta$ den Wert Null haben. Es ist dann auch $D = 0$. In den Fällen 15) und 17), d. h. wenn die Fläche in zwei Ebenen zerfallen soll, müssen $D = 0$ und $\varDelta = 0$, aber auch alle anderen Unterdeterminanten von $D = 0$ sein. Denn die Schnittlinie der beiden Ebenen ist Mittellinie der Fläche, also muß aus zwei der drei Gleichungen 2), § 15 wieder die dritte folgen. Andererseits muß $a'_{44} = 0$ werden, d. h. die vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma + a_{14} &= 0, \\ a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma + a_{24} &= 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma + a_{34} &= 0, \\ a_{41}\alpha + a_{42}\beta + a_{43}\gamma + a_{44} &= 0 \end{aligned} \qquad 20)$$

ergeben vier durch ein und dieselbe Gerade gehende Ebenen, wenn α, β, γ durch x, y, z ersetzt werden. Und in dieser Geraden schneiden sich auch die beiden Ebenen, aus welchen

die Fläche besteht. Also verschwindet die Determinante D des Systems 20) und ihre sämtlichen Unterdeterminanten.

Alles in allem erhält man also folgende Zusammenstellung der Ausnahmefälle:

1. $D = 0$, $\varDelta \neq 0$.

   Die Fläche ist ein Kegel, dessen Spitze durch irgend drei der vier Gleichungen 20) bestimmt wird.

   a) Reeller Kegel, wenn t negativ oder s und $\varDelta$ ungleiche Vorzeichen oder beides.

   b) Imaginärer Kegel (unendlich kleines Ellipsoid), wenn t positiv, s und $\varDelta$ gleiche Vorzeichen.

2. $\varDelta = 0$, $D \neq 0$.

   a) Elliptisches Paraboloid, wenn t positiv.

   b) Hyperbolisches Paraboloid, wenn t negativ.

3. $D = 0$, $\varDelta = 0$, aber nicht alle Unterdeterminanten von $D = 0$.

   Die Fläche ist ein Zylinder, dessen Mittellinie als Schnittlinie der drei Ebenen 2), § 15 bestimmt wird.

   a) Reeller elliptischer Zylinder, wenn t positiv, s und a'_{44} entgegengesetzte Vorzeichen.

   b) Imaginärer elliptischer Zylinder, wenn t positiv, s und a'_{44} gleiche Vorzeichen.

   c) Hyperbolischer Zylinder, wenn t negativ.

   d) Parabolischer Zylinder, wenn $t = 0$ [also da auch $\varDelta = 0$, sämtliche Unterdeterminanten von $\varDelta = 0$ (S. 167)].

   [Die in 3 a) und b) genannte Größe a'_{44} ist nach 3), § 15 zu berechnen, nachdem irgend ein Punkt der durch 2), § 15 bestimmten Mittellinie eingesetzt worden ist. Übrigens läßt sich zeigen, daß das Vorzeichen von a'_{44} in diesen beiden Fällen mit dem gemeinsamen Vorzeichen der drei zu a_{11}, a_{22} und a_{33} zugehörigen Unterdeterminanten von D übereinstimmt.]

4. $D = 0$, sämtliche Unterdeterminanten von D, $\varDelta$ mit eingeschlossen, verschwinden.

   Die Fläche zerfällt in zwei Ebenen, deren Durchschnittslinie durch irgend zwei der vier Gleichungen 20) bestimmt wird. Ist t nicht $= 0$, d. h. verschwinden nicht

sämtliche Unterdeterminanten von Δ, so liegt die Schnittlinie in der „Endlichkeit“, d. h. nicht unendlich fern. Die beiden Ebenen sind dann reell, wenn t negativ, imaginär (unendlich dünner elliptischer Zylinder), wenn t positiv. Ist aber $t = 0$, so zerfällt die Fläche in zwei parallele (reelle oder imaginäre) Ebenen. Als letzter Grenzfall ist noch zu erwähnen, daß die beiden Ebenen zusammenfallen. Dann verschwinden auch alle Unterdeterminanten der Unterdeterminanten von D (Unterdeterminanten zweiter Ordnung). Die vier Gleichungen 20) unterscheiden sich nur durch konstante Faktoren und geben alle vier dieselbe Ebene, diejenige nämlich, welche durch die gegebene Gleichung I) selbst doppelt dargestellt wird.

Die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades ist nunmehr bis zum letzten Ende durchgeführt. Sie ist streng metrisch und hat es ausschließlich mit Transformationen von rechtwinkligen auf andere rechtwinklige Koordinaten zu tun.

Als Ergänzung, welche auch der projektiven Auffassung (I, § 26) gerecht wird, ist ein kurzer Hinweis auf die allgemeinsten linearen Transformationen solcher Gleichungen am Platze, wobei man am besten nach I, § 21 erst homogen macht, indem statt x, y, z gesetzt werden:

$$\frac{x}{t}, \quad \frac{y}{t}, \quad \frac{z}{t}.$$

Nach Multiplikation mit t^2 wird dann die Gleichung I) zu einer homogenen Gleichung zweiten Grades zwischen den vier Veränderlichen x, y, z, t.

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 + 2a_{12}xy \\ &+ 2a_{13}xz + 2a_{14}xt + 2a_{23}yz + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt = 0. \end{aligned} \tag{1a}$$

Setzt man nun irgend eine (homogene) lineare Transformation:

$$\begin{aligned} x &= a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 + a_4t_1 \\ y &= b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 + b_4t_1 \\ z &= c_1x_1 + c_2y_1 + c_3z_1 + c_4t_1 \\ t &= d_1x_1 + d_2y_1 + d_3z_1 + d_4t_1 \end{aligned} \tag{2a}$$

in 1a) ein, von der die Transformation rechtwinkliger Systeme ineinander ein besonderer Fall ist [$d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $d_4 = 1$, so daß die letzte Gleichung $t = t_1 (= 1)$ fortfällt usw.], so kann nach allen Formen gefragt werden, welche 1a) annehmen kann, insbesondere aber nach der Möglichkeit, die „reine" Form zu erlangen:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \lambda_4 t_1^2 = 0. \tag{3a}$$

Daß dieselbe auf unendlich viele Weisen erreicht werden kann, ist durch Abzählen sofort klar, da nur sechs Koeffizienten der quadratischen Form verschwinden sollen, während 16 Substitutionskoeffizienten in 2a) zur Verfügung stehen. [Werden x_1, y_1, z_1, t_1 allgemein als „tetraedrische" Koordinaten (siehe I, § 21) angesehen, so muß das zugrunde zu legende Tetraeder sich selbst polar werden (I, § 22).] Macht man die Voraussetzung, daß die Substitution 2a) umkehrbar ist, daß also die Determinante der 16 Koeffizienten nicht $= 0$ sein soll, so gilt für alle möglichen Umformungen in Quadrate der folgende, sehr wichtige, auch als „Trägheitsgesetz" der quadratischen Formen bezeichnete Satz:

Wie man auch eine gegebene quadratische Form 1a) durch eine Substitution 2a) mit reellen Koeffizienten „rein" darstellt, die Anzahl der Koeffizienten

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \lambda_3, \quad \lambda_4,$$

welche positiv sind, ist unabänderlich dieselbe und ein gleiches gilt dann selbstverständlich für die negativen.

Denn gesetzt man habe zwei verschiedene Darstellungen von der Form 3a) — die zweite möge mit 3'a) und ihre Koeffizienten mit $\lambda'_1 \ldots$ usw. bezeichnet werden — und damit die Identität:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 + \lambda_4 t_1^2 \equiv \lambda'_1 x'^2_1 + \lambda'_2 y'^2_1 + \lambda'_3 z'^2_1 + \lambda'_4 t'^2_1$$

erlangt und es habe sich herausgestellt, daß das erste Mal etwa drei der λ, z. B. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ positiv, λ_4 dagegen negativ; das zweite Mal dagegen nur zwei, λ'_1, λ'_2, positiv, die beiden andern, λ'_3 und λ'_4, negativ seien. Dann schreibe man die Identität folgendermaßen:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + \lambda_3 z_1^2 - \lambda'_3 z'^2_1 - \lambda'_4 t'^2_1 \equiv \lambda'_1 x'^2_1 + \lambda'_2 y'^2_1 - \lambda_4 t_1^2.$$

so stehen links und rechts nur positive Größen, die sich im äußersten Falle auf null reduzieren, wenn alle Glieder null werden. Der Ansatz:

$$x'_1 = y'_1 = t_1 = 0$$

führt daher sofort zu dem Schluß, daß auch:

$$x_1 = y_1 = z_1 = z'_1 = t'_1 = 0$$

und also auch:

$$x = y = z = t = 0.$$

Nun aber ergeben die Bedingungen $x'_1 = y'_1 = t_1 = 0$ nach Umkehrung von 2a) bzw. von 2′a) nur drei Gleichungen zwischen x, y, z, t, welche stets erfüllt werden können, ohne daß zugleich $x = y = z = t = 0$ ist. Die gemachte Voraussetzung ist also falsch, der Satz daher richtig.

Ähnlich beweist man, daß wenn einmal ein λ den Wert 0 hat, dies immer so sein muß, in welchem Falle daher die Form nicht durch vier, sondern durch drei Quadrate dargestellt wird. Und sind einmal gar zwei oder drei der $\lambda = 0$, so ist dies auch immer so, die Form ist dann durch zwei oder durch ein Quadrat darstellbar.

Betrachtet man von dem so gewonnenen und einen klaren Überblick gewährenden Standpunkt noch einmal die in § 14 aufgezählten Formen, mit Rücksichtnahme erstens auf den Umstand, daß man durch Multiplikation mit -1 sämtliche Vorzeichen wechseln kann, und zweitens auf die Tatsache, daß auch die Formen V), VI) und IX) sofort „rein“ dargestellt werden können, z. B. V) statt:

$$z - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},$$

so bleiben folgende Möglichkeiten:

1. Alle vier Quadrate haben Koeffizienten mit gleichen Vorzeichen. Man findet nur 1a), also das imaginäre Ellipsoid.
2. Drei der Koeffizienten positiv, einer negativ, oder umgekehrt. Hierher gehören: I), III), V), also das reelle Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid, das elliptische Paraboloid.

3. Zwei Koeffizienten positiv, zwei negativ. Hierher gehören: II) und VI), das einschalige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid.
4. Ein Koeffizient $= 0$, die drei anderen haben gleiche Vorzeichen. Hierher gehören: IVa) und VIIa), der imaginäre Kegel und der imaginäre Zylinder.
5. Ein Koeffizient $= 0$, die drei anderen haben teils positive, teils negative Vorzeichen. Hierher gehören: IV), VII), VIII) und IX), der elliptische Kegel, der elliptische, der hyperbolische und der parabolische Zylinder.
6. Zwei Koeffizienten $= 0$, die beiden anderen haben gleiche Vorzeichen. Hierher gehören: Xa) und Xc), zwei imaginäre, sich in einer reellen oder unendlich fernen Geraden schneidende Ebenen.
7. Zwei Koeffizienten $= 0$, die beiden anderen haben entgegengesetzte Vorzeichen. Hierher gehören: Xb) und Xd), zwei reelle, sich schneidende oder parallele Ebenen.
8. Drei Koeffizienten $= 0$. Xe). Die Fläche ist eine Doppelebene.

Diese Einteilung ist projektivischer, also nicht metrischer Natur (I, § 26).

Aus dem Trägheitsgesetz der quadratischen Formen geht hervor, daß es nur möglich ist, solche Flächen kollinear (und reell) aufeinander abzubilden, die hier unter derselben Nummer genannt sind. So ist z. B. jede Mühe umsonst, ein Ellipsoid kollinear auf ein einschaliges Hyperboloid oder auf einen Kegel beziehen zu wollen, wohl aber kann ersteres auf diese Weise in ein zweischaliges Hyperboloid oder ein elliptisches Paraboloid verwandelt werden.

Übrigens ersieht man aus der in diesem Paragraphen durchgeführten Untersuchung der Ausnahmefälle, daß die Bedingung für das Verschwinden eines λ in 3a) durch die Gleichung $D = 0$ und für das Verschwinden zweier λ durch das Nullsetzen aller Unterdeterminanten von D gegeben wird.

Die numerische Durchrechnung der Diskussion, wenn die Koeffizienten a_{11}, a_{12} ... ziffernmäßig gegeben sind, erfordert ungleich mehr Mühe als im analogen Problem der Kurven zweiter Ordnung, ist aber doch bei einiger Umsicht noch zu

bewältigen. Die Art und Weise des Vorgehens wird das folgende Beispiel lehren.

Gegeben sei die Gleichung:

$$4x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 4yz - 4xy + 32x - 28y + 4z + 46 = 0, \qquad \textbf{21)}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{23} & a_{31} & a_{12} & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ = +4, & +5, & +6, & +2, & 0, & -2, & +16, & -14, & +2, & +46. \end{array}$$

Man bilde nach 16), 17) und 4), § 15:

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4 + 5 + 6 = +15,$$
$$t = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2 = +66,$$
$$\varDelta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{31} = +80.$$

Die direkte Berechnung von D nach 4), § 15 durch eine Determinante vierten Grades empfiehlt sich im allgemeinen nicht (als zu umständlich). Bequemer ist es, da $\varDelta$ nicht verschwindet, erst die Koordinaten des Mittelpunktes M nach 2), § 15 zu berechnen:

$$\begin{array}{rlrrr} 4\alpha - 2\beta + 0\gamma + 16 = 0 & \quad & +26, & +12, & -4, \\ -2\alpha + 5\beta + 2\gamma - 14 = 0 & & +12, & +24, & -8, \\ 0\alpha + 2\beta + 6\gamma + 2 = 0 & & -4, & -8, & +16. \end{array}$$

(Man multipliziere mit den rechts stehenden Unterdeterminanten von $\varDelta$, um immer gleich zwei Unbekannte zu eliminieren.) Es folgt:

$$80\alpha + 240 = 0, \quad 80\beta - 160 = 0, \quad 80\gamma + 80 = 0.$$

Der Mittelpunkt ist daher:

$$M(-3, +2, -1). \qquad \textbf{22)}$$

Die Formel 3), § 15 gibt nun:

$$a'_{44} = 16(-3) - 14(+2) + 2(-1) + 46 = -32$$

(also: $D = a'_{44} \cdot \varDelta = -2560$).

Transformiert man auf den Mittelpunkt und setzt nach 1):

$$x = x_1 - 3, \quad y = y_1 + 2, \quad z = z_1 - 1, \qquad \textbf{23)}$$

so entsteht mithin die neue Gleichung:

$$4x_1^2 + 5y_1^2 + 6z_1^2 + 4y_1z_1 - 4x_1y_1 - 32 = 0. \qquad \textbf{24)}$$

(Man überzeuge sich zur Probe von der Richtigkeit durch unmittelbares Einsetzen von 23) in 21), Auflösen der Klammern und Zusammenziehen.)

Nunmehr ist die kubische Gleichung 13a), § 15, S. 171 anzuziehen, welche hier wird:

$$\lambda^3 - 15\,\lambda^2 + 66\,\lambda - 80 = 0.$$

Nach der kartesischen Zeichenregel sind ihre Wurzeln alle drei positiv. Glücklicherweise sind sie hier (zufällig?) ganze Zahlen. Man findet:

$$\lambda_1 = +8, \quad \lambda_2 = +5, \quad \lambda_3 = +2.$$

Die Gleichung IV), § 15, S. 170 wird daher:

$$8\,\xi^2 + 5\,\eta^2 + 2\,\zeta^2 - 32 = 0$$

oder

$$\frac{\xi^2}{4} + \frac{\eta^2}{6{,}4} + \frac{\zeta^2}{16} - 1 = 0. \qquad \textbf{25)}$$

Also ein reelles Ellipsoid mit den Halbachsen:

$$a = \sqrt{4} = 2 \quad \text{(kleinste Halbachse)},$$
$$b = \sqrt{6{,}4} = 2{,}5298 \quad \text{(mittlere Halbachse)},$$
$$c = \sqrt{16} = 4 \quad \text{(größte Halbachse)}.$$

Die Fläche selbst und ihr Mittelpunkt sind gefunden und es bleibt nur noch die Ermittelung der Richtungen der Halbachsen nach den Gleichungen 10), § 15:

$\lambda_1 = +8$ gibt:

$$-4\,\mathfrak{a}_1 - 2\,\mathfrak{b}_1 = 0, \quad -2\,\mathfrak{a}_1 - 3\,\mathfrak{b}_1 + 2\,\mathfrak{c}_1 = 0, \quad +2\,\mathfrak{b}_1 - 2\,\mathfrak{c}_1 = 0.$$

(Diese drei Gleichungen müssen der Theorie nach voneinander abhängig sein und in der Tat erhält man identisch $0 = 0$, wenn die erste mit -1, die zweite mit $+2$, die dritte mit $+2$ multipliziert und dann addiert wird.)

Es folgt:

$$\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{b}_1 : \mathfrak{c}_1 = -1 : +2 : +2$$

und (da $\sqrt{(-1)^2 + (+2)^2 + (+2)^2} = +3$) wenn die positive Wurzel genommen wird:

$$\mathfrak{a}_1 = -\frac{1}{3}, \quad \mathfrak{b}_1 = +\frac{2}{3}, \quad \mathfrak{c}_1 = +\frac{2}{3}.$$

$\lambda_2 = +5$ gibt:

$$-\mathfrak{a}_2 - 2\,\mathfrak{b}_2 = 0, \quad -2\,\mathfrak{a}_2 + 2\,\mathfrak{c}_2 = 0, \quad +2\,\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{c}_2 = 0.$$

$$\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{b}_2 : \mathfrak{c}_2 = +2 : -1 : +2.$$

Daher, wenn die Wurzel hier auch positiv genommen wird:

$$\mathfrak{a}_2 = +\frac{2}{3}, \quad \mathfrak{b}_2 = -\frac{1}{3}, \quad \mathfrak{c}_2 = +\frac{2}{3}.$$

$\lambda_3 = +2$ gibt:

$$2\,a_3 - 2\,b_3 = 0, \quad -2\,a_3 + 3\,b_3 + 2\,c_3 = 0, \quad +2\,b_3 + 4\,c_3 = 0,$$

$$a_3 : b_3 : c_3 = +2 : +2 : -1.$$

Hier ist das Vorzeichen der Wurzel, ob $\pm\sqrt{9} = \pm 3$, nicht mehr willkürlich, wenn die beiden Koordinatensysteme $x_1 y_1 z_1$ und $\xi\eta\zeta$ gleichstimmig sein sollen. Man berechne daher a_3 auch nach 6), § 3 also:

$$a_3 = b_1 c_2 - c_1 b_2 = +\frac{2}{3} \cdot +\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{3} = +\frac{2}{3}.$$

Die Wurzel ist daher ebenfalls positiv zu nehmen, mithin:

$$a_3 = +\frac{2}{3}, \quad b_3 = +\frac{2}{3}, \quad c_3 = -\frac{1}{3}.$$

Die Transformationsformeln werden somit:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta + \frac{2}{3}\zeta, \\ y_1 &= +\frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\zeta, \\ z_1 &= +\frac{2}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta - \frac{1}{3}\zeta. \end{aligned} \tag{26}$$

[Man überzeuge sich zur Probe, daß durch direktes Einsetzen in 24), Auflösen und Zusammenziehen in der Tat die Gleichung 25) entsteht, wie es sein muß.]

Anmerkung: Wie man sieht, ist in diesem Beispiel alles überraschend „glatt" gegangen. Denn nicht allein, daß bei der Berechnung des Mittelpunktes sich der Nenner $\varDelta = 80$ fortgehoben hat, auch die kubische Gleichung hat ganze Wurzeln gehabt und schließlich ist noch die Quadratwurzel dreimal aufgegangen. Es ist wohl nicht mehr als billig, zu erwähnen, daß dies kein Zufall ist, sondern daß das Beispiel vorher „zurecht gemacht" worden ist, damit der Leser dem Gange der Rechnung ohne den Ballast logarithmischer Operationen folgen kann. In der Tat ist der Verfasser dabei von der Gleichung 25) ausgegangen, hat dann die Umkehrung der Transformation 26) gemacht [siehe Übungsaufgabe 4), § 3], dabei die Gleichung 24) erzielt und darauf nach Umkehrung von 23) endlich die Gleichung 21), also die zur Diskussion vorgelegte Gleichung erhalten.

Übungsaufgaben.

1. Wann stellt die allgemeine Gleichung I) ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid vor?

2. Man entwickele [siehe Aufgabe b), § 4, S. 44] die Gleichungen derjenigen Flächen zweiter Ordnung, welche die Eigenschaft haben, daß die Entfernungen ihrer Punkte von zwei gegebenen Geraden l und l_1 ein gegebenes Verhältnis zueinander haben und diskutiere sie.

3. Gehören zu jeder Fläche zweiter Ordnung zwei solche Gerade l und l_1 derart, daß das Verhältnis der Entfernungen von ihnen ein konstantes ist? Wenn nicht, welche Bedingung muß erfüllt sein?

4. Wenn die in 3) genannte Bedingung erfüllt ist, so zeige man, daß nicht ein Paar solcher Geraden l und l_1, sondern unzählig viele existieren.

---

§ 17.

Kreise auf dem Ellipsoid und den anderen Flächen zweiter Ordnung. Beliebige ebene Schnitte. Ihre Hauptachsen.

Gegeben sei das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

und es möge a die größte, b die mittlere, c die kleinste Halbachse sein:

$$a > b > c. \tag{2}$$

Keiner der drei Hauptschnitte ist ein Kreis. Kann es trotzdem auf dem Ellipsoid Kreise geben? (Fig. 25).

Ist ein solcher Kreis vorhanden, so sind nach § 13 alle parallelen Schnitte ebenfalls Kreise. Man kann sich daher zunächst auf Ebenen durch den Mittelpunkt, auf Durchmesserebenen beschränken. Für die beiden Hauptschnitte durch die mittlere Achse $2b$ ist diese einmal die kleinere ($b < a$), ein andermal die größere Achse ($b > c$). Wird durch eine Hauptachse des Ellipsoids ein beliebiger ebener Schnitt gelegt, so wird sie auch in diesem Schnitt Hauptachse sein, während die andere Hauptachse des Schnittes in der Ebene der beiden anderen Hauptachsen des Ellipsoids liegt. Man lege daher durch b eine Ebene so, daß die Ellipse mit den Halbachsen a und c in einem Durchmesser von der Länge $2b$ geschnitten werde (was

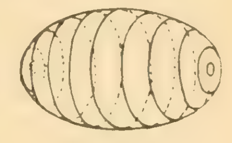


Fig. 25.

offenbar auf zwei Arten möglich ist). Der Schnitt ist dann sicherlich ein Kreis.

Rein analytisch gelangt man zu diesem Ergebnis durch Zusammenstellung des Ellipsoids 1) und der konzentrischen Kugel mit dem Radius b:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{3}$$

und Aufsuchung des Schnittes beider Flächen. Durch Subtraktion folgt:

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0. \tag{4}$$

Der erste Koeffizient ist nach 2) negativ, der zweite positiv. Setzt man also zur Abkürzung:

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} = k^2, \qquad \frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} = l^2, \tag{5}$$

so zerfällt 4) in zwei durch die y-Achse gehende Ebenen:

$$-xk + zl = 0 \quad \text{und} \quad xk + zl = 0, \tag{6}$$

und dies sind also die Ebenen der beiden genannten Kreisschnitte.

Sie teilen das Ellipsoid in vier paarweise gegenüberliegende Teile. Diejenigen, in welchen die Scheitel der großen Achse liegen, enthalten nur Punkte, deren Entfernung vom Mittelpunkt größer als b, die beiden anderen solche, deren Entfernung kleiner als b ist. Wenn aber die Fläche ein Umdrehungsellipsoid, also entweder $b = a$ oder $b = c$, so ist $k = 0$ oder $l = 0$ und die beiden Kreisschnitte fallen in einen, den Hauptkreis zusammen.

Wird aber das Ellipsoid 1) mit den konzentrischen Kugeln vom Radius a oder c zusammengestellt, so findet offenbar kein Schneiden, sondern nur ein Berühren der Kugel mit dem Ellipsoid in zwei Scheiteln statt. Analytisch zeigt sich dies in dem Umstande, daß in der entsprechenden Gleichung zu 4) beide Koeffizienten gleiche Vorzeichen erhalten, die Ebenen der Kreisschnitte also imaginär werden.

Die beiden Kreisschnitte mit den Ebenen 6) sind die Hauptrepräsentanten zweier Scharen von parallelen Kreisen auf dem Ellipsoid. Man betrachte also irgend eine parallele Ebene:

$$\pm xk + zl + h = 0. \tag{7}$$

Der Mittelpunkt des Schnittkreises muß selbstverständlich in der xz-Ebene liegen und daher Mitte der Sehne sein, in welcher die Ebene 7) die Ellipse:

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{8}$$

schneidet. Der geometrische Ort des Mittelpunktes ist daher der konjugierte Durchmesser, dessen Gleichung nach 1), § 14 wird:

$$z a^2 k + x c^2 l = 0. \tag{9}$$

Der Kreis wird um so kleiner, je größer h, und schrumpft zuletzt nach der einen und nach der anderen Seite zu einem Punkt zusammen. Es gibt daher vier solche sich paarweise gegenüberliegende Punkte, deren Koordinaten durch Zusammenstellen von 8) und 9) zu berechnen sind. Sie werden nach Einsetzen von k und l aus 5):

$$x = \pm a \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad y = 0, \quad z = \pm c \cdot \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}. \tag{10}$$

Diese Grenzpunkte nennt man auch Kreispunkte oder Nabelpunkte des Ellipsoids*).

Da der konjugierte Durchmesser die parallele Kreisschar schief schneidet, so können irgend zwei Kreise dieser Schar nicht auf derselben Kugel liegen. Wohl aber gilt folgender Satz:

Jeder Kreis der einen Schar liegt mit jedem Kreise der anderen Schar auf ein und derselben Kugel.

Es seien:

$$U \equiv + kx - zl + h = 0, \quad U_1 \equiv - kx - zl + h_1 = 0$$

die Ebenen der beiden Kreise. Man bilde die Kombination:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) - U \cdot U_1 = 0.$$

*) Sie spielen in der Theorie der Krümmung eine gewisse Rolle. Eine Kugel hat nicht allein in allen ihren Punkten, sondern auch in jedem Punkt nach allen tangentialen (azimutalen) Richtungen dieselbe Krümmung. Anders bei anderen Flächen. Nicht allein sind hier die verschiedenen Punkte hinsichtlich der Krümmung verschieden, sondern es zeigen sogar für denselben Punkt die Normalschnitte (deren Ebenen durch die Normale gehen) je nach dem Azimut eine andere Krümmung. Für den Scheitel B des Ellipsoids z. B. ist die Krümmung im Hauptschnitt BCB_1C_1 augenscheinlich größer als im Hauptschnitt BAB_1A_1 und in anderen Normalschnitten durch B liegt sie zwischen diesem Maximum und Minimum. Punkte aber, wo die Krümmung in allen tangentialen Richtungen dieselbe ist, treten auf Flächen im allgemeinen nur vereinzelt auf. Sie sind ihre Kreispunkte oder Nabelpunkte.

Nach Auflösung der Klammern wird diese Gleichung bei Benutzung der Werte von k und l:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} + zl(h - h_1) + xk(h - h_1) + hh_1 - 1 = 0.$$

Sie stellt also eine Kugel dar, die, wie die eben ausgeführte Konstruktion ihrer Gleichung beweist, durch den Durchschnitt des Ellipsoids sowohl mit der Ebene $U = 0$, als auch mit der Ebene $U_1 = 0$ gehen muß. Q. e. d.

Selbstverständlich kann diese Untersuchung über Kreisschnitte ohne Schwierigkeit auf die übrigen Flächen zweiter Ordnung übertragen werden. Es genügt daher wohl die Angabe der Resultate.

Beim einschaligen Hyperboloid erhält man die beiden Hauptkreise, welche diesmal die kleinsten sind (beim Ellipsoid waren sie die größten), als Schnitte mit einer konzentrischen Kugel, deren Radius gleich der größeren Halbachse der Kehlellipse ist. Die Nabelpunkte sind imaginär. Beim zweischaligen Hyperboloid sind zwar die Ebenen dieser beiden Hauptkreise reell, sie selbst aber imaginär und man muß parallele Ebenen nehmen, um wirkliche Kreise zu erhalten. Vier reelle Nabelpunkte. Der elliptische Kegel bzw. Zylinder hat als Grenzfall der Hyperboloide zwei parallele Scharen von Kreisen und kann also auf doppelte Art als „schiefer" Kreiskegel bzw. Kreiszylinder angesehen werden. Beim elliptischen Paraboloid sind, wenn $q > p$, die Ebenen der Kreisschnitte:

$$z + x\sqrt{\frac{q-p}{p}} + h = 0, \qquad z - x\sqrt{\frac{q-p}{p}} + h_1 = 0.$$

Zwei reelle Nabelpunkte auf der Hauptparabel: $y = 0$, $z = \frac{x^2}{2p}$.

Das hyperbolische Paraboloid, der hyperbolische und der parabolische Zylinder dagegen weisen keine eigentlichen Kreisschnitte auf. Indessen kann man für das hyperbolische Paraboloid diejenigen Ebenen, welche zu einer der beiden Scharen von Geraden auf der Fläche parallel sind (siehe § 19), als die Ebenen der Kreisschnitte ansehen, da sie die Fläche in einer

dieser Geraden und in einer unendlich fernen Geraden schneiden. Beim hyperbolischen Zylinder wird man diejenigen Ebenen nehmen, welche zu den Asymptotenebenen parallel sind und beim parabolischen Zylinder endlich fallen diese beiden Scharen von Ebenen zusammen; sie werden Ebenen parallel zu den Kanten und parallel zur Achse des Querschnittes.

Beliebige Schnitte (Fig. 26). Die Theorie der Kreisschnitte bedarf, um sie ganz einwandfrei zu machen, noch einer Ergänzung durch den Nachweis, daß die hier namhaft gemachten in der Tat die einzigen Kreise auf den Flächen sind. Dies wird sich herausstellen müssen — falls es richtig ist — wenn man irgend einen ebenen Schnitt hinsichtlich seiner Hauptachsen untersucht, wobei der Einfachheit wegen wieder ein Ellipsoid:

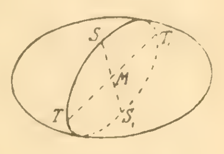


Fig. 26.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \mathbf{1)}$$

angenommen werden mag. Auch kann man sich auf eine Durchmesserebene E:

$$mx+ny+pz=0 \qquad \mathbf{11)}$$

beschränken, da nach § 13 parallele Schnitte gleiche Achsenrichtungen und gleiche Achsenverhältnisse haben.

Es seien (Fig. 26) $S(x, y, z)$ und $T(x_1, y_1, z_1)$ zwei nicht gegenüberliegende Scheitel, also $SM = a_1$, $TM = b_1$, die beiden Halbachsen des Schnittes. Dann setze man die sechs Gleichungen an:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0, & 2)\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}+\dfrac{z_1^2}{c^2}-1=0, & \\ 3)\ mx+ny+pz=0, & 4)\ mx_1+ny_1+pz_1=0, & \mathbf{12)} \\ 5)\ xx_1+yy_1+zz_1=0, & 6)\ \dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}+\dfrac{zz_1}{c^2}=0. & \end{array}$$

12_1) und 12_2) sagen aus, daß S und T auf dem Ellipsoid, 12_3) und 12_4), daß sie auf E liegen. 12_5) ist Bedingung, daß MS und MT senkrecht aufeinanderstehen und 12_6) endlich folgt aus der im nächsten Paragraphen entwickelten Theorie der konjugierten Durchmesser.

Um aber nicht vorzugreifen, mag $12_6)$ folgendermaßen abgeleitet werden. Die Parallele durch S zu MT muß das Ellipsoid berühren. Es sei ξ, η, ζ irgend ein Punkt auf ihr, also nach den Formeln 9), § 2:

$$\xi = x + kx_1, \qquad \eta = y + ky_1, \qquad \zeta = z + kz_1.$$

Soll er auf dem Ellipsoid liegen, so folgt aus 1) unter Benutzung von $12_1)$ und $12_2)$ die quadratische Gleichung für k:

$$k^2 + 2k\left(\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} + \frac{z \cdot z_1}{c^2}\right) = 0.$$

Da nun die Parallele, wie gesagt, Tangente ist, so müssen die beiden Schnittpunkte mit dem Ellipsoid in einen Punkt, und zwar den Punkt S zusammenfallen, dem der Wert $k = 0$ entspricht. Die eben abgeleitete Gleichung muß sich demnach auf $k^2 = 0$ reduzieren, womit $16_6)$ erwiesen ist.

In 12) ist der Ansatz zur analytischen Lösung des Problems in Gestalt von sechs Gleichungen mit den sechs Unbekannten x, y, z, x_1, y_1, z_1 gegeben und es kommt nun darauf an, ihn geschickt zu benutzen. Hierzu bemerke man zunächst, daß $12_3)$, $12_4)$, $12_5)$, $12_6)$ in bezug auf die beiden Reihen xyz und $x_1 y_1 z_1$ homogen sind und also wie vier Gleichungen mit den vier Unbekannten $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, \frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}$ behandelt werden können. Dann beachte man, daß $12_4)$, $12_5)$ und $12_6)$ drei lineare Gleichungen in bezug auf $\frac{x_1}{z_1}$ und $\frac{y_1}{z_1}$ sind, also in diesem Sinne eine lineare Identität zwischen ihnen vorhanden sein muß, die symbolisch durch:

$$12_5) + \mu \cdot 12_4) + \lambda \cdot 12_6) = 0$$

bezeichnet werden mag, wo μ und λ noch bestimmt werden müssen. Diese Identität löst sich nach Einsetzen von $12_4)$, $12_5)$ und $12_6)$ in die drei Gleichungen auf:

$$m\mu + x + \lambda\frac{x}{a^2} = 0, \quad n\mu + y + \lambda\frac{y}{b^2} = 0, \quad p\mu + z + \lambda\frac{z}{c^2} = 0, \qquad 13)$$

aus denen sofort folgt:

$$x = -\frac{m\mu a^2}{a^2 + \lambda}, \quad y = -\frac{n\mu b^2}{b^2 + \lambda}, \quad z = -\frac{p\mu c^2}{c^2 + \lambda}. \qquad 14)$$

Setzt man diese Ausdrücke in 12_3) ein, so entsteht nach Fortlassung des Faktors μ (der nicht $= 0$ sein kann) die Endgleichung für λ:

$$\frac{m^2 a^2}{a^2 + \lambda} + \frac{n^2 b^2}{b^2 + \lambda} + \frac{p^2 c^2}{c^2 + \lambda} = 0. \qquad 15)$$

Sie wird nach Fortschaffung der Nenner vom zweiten Grade, und jede ihrer beiden Wurzeln entspricht einer der beiden Halbachsen des Schnittes, deren Richtungen dann nach 14) durch die Proportion:

$$x : y : z = \frac{m a^2}{a^2 + \lambda} : \frac{m b^2}{b^2 + \lambda} : \frac{n c^2}{c^2 + \lambda}$$

zu bestimmen sind. Um aber ihre Längen a' und b' zu ermitteln, kann man 14) in die noch nicht benutzte Gleichung 12_1) einführen, aus der so entstandenen rein quadratischen Gleichung μ ermitteln und dann zu 14) zurückkehrend den Scheitel S bzw. T berechnen.

Dieses Verfahren zur Bestimmung von a' und b' erweist sich aber merkwürdigerweise hier als ganz überflüssig, da ein viel einfacherer, allerdings versteckter Weg zum Ziele führt. Man multipliziere nämlich die Gleichungen 13) der Reihe nach mit x, y, z und benutze 12_1) und 12_3). So entsteht die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda = 0,$$

also:

$$\lambda = -a'^2 \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -b'^2. \qquad \mathbf{16)}$$

Die Gleichung 15) gibt also auch unmittelbaren Aufschluß über die Längen der Halbachsen, da diese $= \sqrt{-\lambda_1}$ und $\sqrt{-\lambda_2}$ sind.

Sie wird nach Fortschaffung der Nenner:

$$m^2 a^2 (b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) + n^2 b^2 (c^2 + \lambda)(a^2 + \lambda) \\ + p^2 c^2 (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda) = 0.$$

Es sei $a > b > c$. Setzt man in die linke Seite für λ der Reihe nach $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$, so wird sie erst positiv, dann negativ, dann wieder positiv. Die eine Wurzel der Gleichung 15) muß daher zwischen $-a^2$ und $-b^2$, die andere zwischen $-b^2$ und $-c^2$ liegen, d. h. nach 16):

Die größere Halbachse ist kleiner als a und größer als b, die kleinere Halbachse ist kleiner als b und größer als c.

Hier schließt aber größer und kleiner den Grenzfall der Gleichheit nicht aus, welche eintritt, wenn einer der Koeffizienten m, n, $p = 0$, d. h. wenn die Ebene durch eine der drei Hauptachsen des Ellipsoids geht, die dann zugleich eine Hauptachse des Schnittes wird. Da aber die Grenzen, in denen a' und b' sich bewegen können, nur den einen Wert $a' = b' = b$ gemeinsam haben, so entsprechen nur diesen Werten Kreise. Es gibt also keine anderen als die schon behandelten Kreisschnitte.

Diese analytische und mustergültige Untersuchung der Hauptachsen der Schnitte eines Ellipsoides verdankt man Lagrange, dem nie übertroffenen Meister an Klarheit, Schärfe, Einfachheit und „Eleganz“ analytischer Entwickelungen*). Zur Ergänzung soll nun aber noch gezeigt werden, wie man die Hauptergebnisse außerordentlich einfach auch rein geometrisch finden kann, wenn die Existenz der beiden Kreisschnitte als bewiesen vorausgesetzt wird.

Die gegebene Durchmesserebene schneidet die Ebenen dieser beiden Kreise in zwei Geraden, deren Längen vom Mittelpunkt bis zum Schnitt mit dem Ellipsoid daher beide $= b$ sind. Es gibt mithin in jedem Schnitt Halbmesser von der Länge b und daraus folgt, daß die größere Halbachse $> b$, die kleinere $< b$ sein muß. Nun aber ist andererseits a das absolute Maximum und c das absolute Minimum der Entfernung überhaupt, also muß die große Halbachse zwischen a und b, die kleine zwischen b und c enthalten sein.

Und ferner: In den beiden Schnittgeraden mit den Ebenen der Kreisschnitte sind zwei gleiche, also auch zu der großen und zur kleinen Hauptachse symmetrisch liegende Durchmesser des Schnittes gegeben. Somit findet man die Richtungen der Hauptachsen durch Halbieren der Winkel dieser Durchmesser.

Diese Untersuchungen über die Hauptachsen ebener Schnitte wären nun noch auf die anderen Flächen zweiter Ordnung zu übertragen, was aber wohl dem Leser nach allem Vorangegangenen überlassen bleiben kann.

*) Dabei ist nebensächlich, daß er einen anderen Ausgangspunkt genommen hat, den nämlich, daß MP^2 ein Maximum oder ein Minimum wird, wenn P mit S oder T zusammenfällt.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben das Ellipsoid 1). Auf den im Mittelpunkt errichteten Normalen aller Durchmesserebenen werden vom Mittelpunkt aus nach beiden Seiten die Längen a', bzw. b' der Halbachsen der zugehörigen Schnitte aufgetragen. Die Gleichung der entstehenden Fläche (Fresnelsche Wellenfläche) ist zu bilden.

2. Gegeben das Ellipsoid 1) und die Kugel:

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 - r^2 = 0.$$

Welche Beziehung muß zwischen α, γ, r bestehen, damit der Schnitt beider Flächen in zwei Kreise zerfällt? Wann sind diese reell, wann imaginär? Auf welcher Kurve muß der Mittelpunkt $M(\alpha, 0, \gamma)$ liegen, wenn die Kugel zu einem Punkt zusammenschrumpfen soll?

§ 18.

Konjugierte Durchmesser und Durchmesserebenen. Tangenten, Tangentialebenen und Tangentialkegel. Theorie der Polarität.

Gegeben sei wieder ein Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 1)$$

Um die Frage nach den Mitten paralleler Sehnen zu beantworten, bezeichne man mit $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und $P_2(x_2 y_2 z_2)$ die beiden Schnittpunkte irgend einer Geraden mit dem Ellipsoid. Dann werden ihre Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ durch die Proportion gegeben:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1,$$

während die Mitte $P(x, y, z)$ der Sehne nach 8a), § 2 durch die Formeln:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

bestimmt ist. Andererseits folgt nach Einsetzen von P_1 und P_2 in die Gleichung 1) und Subtraktion sofort:

$$\frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{b^2} + \frac{(z_2 + z_1)(z_2 - z_1)}{c^2} = 0.$$

Daher auch:

$$\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2} = 0. \qquad 2)$$

Wenn α, β, γ, d. h. die Richtung der Sehne gegeben ist, so stellt diese Gleichung den geometrischen Ort der Mitten aller parallelen Sehnen vor. Sie ist vom ersten Grade und es fehlt die Konstante. Also:

Die Mitten paralleler Sehnen liegen in einer Durchmesserebene.

Man nennt sie zu diesen Sehnen und insbesondere zu dem mit ihnen parallelen Durchmesser konjugiert. Konjugiert sind z. B. jede Hauptachse und die Ebene der beiden anderen Hauptachsen.

Wird in der Ebene 2) (Fig. 27) irgend ein Punkt angenommen und bestimmt man die Richtungswinkel $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ des durch ihn gehenden Durchmessers durch die Proportion:

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = x : y : z,$$

so folgt nach 2):

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1}{a^2} + \frac{\cos\beta \cdot \cos\beta_1}{b^2} + \frac{\cos\gamma \cdot \cos\gamma_1}{c^2} = 0. \qquad 3)$$

Diese Gleichung ist, wie man sieht, in bezug auf die beiden Richtungen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ vertauschbar. Man nennt deshalb auch die beiden Durchmesser einander konjugiert. Jeder von ihnen liegt in der konjugierten Durchmesserebene des anderen. Sie sind auch konjugierte Durchmesser derjenigen Ellipse, in welcher das Ellipsoid von der durch beide gehenden Ebene geschnitten wird. Denn zieht man in dieser Ebene die parallelen Sekanten zu dem einen Durchmesser, so müssen die Mitten in der konjugierten Durchmesserebene, also in diesem Falle auf dem eben betrachteten konjugierten Durchmesser liegen.

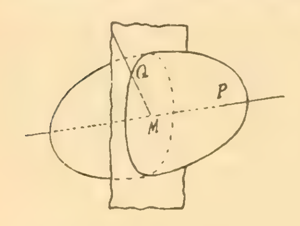


Fig. 27.

Es seien OP und OP_1 zwei zueinander konjugierte Durchmesser mit den Richtungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$. Jeder liegt in der konjugierten Ebene des anderen und diese beiden Ebenen schneiden sich in einem dritten Durchmesser OP_2 $(\alpha_2\beta_2\gamma_2)$, der hiernach sowohl zu OP, als auch zu OP_1 konjugiert ist. Diese drei Durchmesser OP, OP_1, OP_2 sind also jeder zu jedem konjugiert und die Ebene durch je zwei von ihnen ist zugleich die konjugierte Durchmesserebene des dritten. Solcher

Tripel gibt es unzählig viele, da man nach der angegebenen Konstruktion einen der drei Durchmesser ganz beliebig annehmen kann, worauf erst die Ebene der beiden anderen bestimmt ist und also noch der zweite in dieser Ebene willkürlich ausgewählt werden kann. Augenscheinlich bilden die drei Hauptachsen ein derartiges Tripel, und zwar das einzige, in welchem die Durchmesser alle drei aufeinander senkrecht stehen (wenn keine der drei Achsen gleich der anderen, d. h. die Fläche keine Umdrehungsfläche ist).

Ein anderer, sehr bequemer Ausgangspunkt für die Theorie der konjugierten Durchmesser ist die in § 14 gegebene, so einfache affine Abbildung des Ellipsoides 1) auf die Kugel mit dem Radius $r = 1$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \tag{4}$$

durch die Formeln:

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = \frac{y}{b}, \qquad Z = \frac{z}{c}. \tag{5}$$

Bezeichnet man daher mit $\lambda\mu\nu$; $\lambda_1\mu_1\nu_1$; $\lambda_2\mu_2\nu_2$ die Richtungswinkel der irgend drei konjugierten Durchmessern des Ellipsoides entsprechenden Durchmesser der Kugel, so folgt zunächst, da nach 4) $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 1$ usw.

$$\cos\lambda = X, \qquad \cos\mu = Y, \qquad \cos\nu = Z,$$

also nach 5):

$$\cos\lambda = \frac{x}{a}, \qquad \cos\mu = \frac{y}{b}, \qquad \cos\nu = \frac{z}{c}. \tag{6}$$

Daher auch:

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = \frac{\cos\alpha}{a} : \frac{\cos\beta}{b} : \frac{\cos\gamma}{c}. \tag{7}$$

Die Beziehung 3) gibt also nach Übertragung auf die Kugel:

$$\cos\lambda \cdot \cos\lambda_1 + \cos\mu \cdot \cos\mu_1 + \cos\nu \cdot \cos\nu_1 = 0,$$

d. h. nach 15), § 1:

Konjugierte Durchmesser des Ellipsoids 1) sind Projektionen senkrechter Durchmesser der affinen Kugel 4).

Es seien ferner a', b', c' die Längen dreier konjugierter Halbmesser des Ellipsoids, die also Projektionen dreier zueinander senkrechter Durchmesser der Kugel sind, so folgt:

$$a'^2 = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 = a^2 \cos^2\lambda + b^2 \cos^2\mu + c^2 \cos^2\nu.$$

Berechnet man ebenso b'^2 und c'^2, so folgt durch Addition

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 (\cos^2 \lambda + \cos^2 \lambda_1 + \cos^2 \lambda_2) + (\cos^2 \mu + \cos^2 \mu_1 + \cos^2 \mu_2) + c^2 (\cos^2 \nu + \cos^2 \nu_1 + \cos^2 \nu_2).$$

Nach den in § 3 ausführlich abgeleiteten Relationen zwischen den neun Richtungskosinus dreier zueinander senkrechter Richtungen sind die Klammerausdrücke alle drei $= 1$, also:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = b^2 + b^2 + c^2. \qquad 8)$$

Die Summe der Quadrate der Längen konjugierter Halbmesser ist konstant (siehe I, § 14).

Ferner folgt für den Inhalt V des Tetraeders OPP_1P_2 nach 4a), § 2 unter Berücksichtigung von 6):

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a \cos \lambda & b \cos \mu & c \cos \nu \\ a \cos \lambda_1 & b \cos \mu_1 & c \cos \nu_1 \\ a \cos \lambda_2 & b \cos \mu_2 & c \cos \nu_2 \end{vmatrix}$$

Setzt man hier die Faktoren a, b, c vor die Determinante, so bleiben in derselben nur die neun Kosinus. Also nach 7) und 8), § 3:

$$V = \frac{1}{6} abc \quad \text{(vgl. I, § 14).} \qquad 9)$$

Eine dritte, sehr wichtige Folgerung dieser Theorie ist der Satz:

Die Tangentialebene in einem Punkt $P(x, y, z)$ des Ellipsoids ist parallel zur konjugierten Durchmesserebene (d. h. zu derjenigen Durchmesserebene, welche zu dem durch P gehenden Durchmesser konjugiert ist).

Denn zunächst gilt der Satz für die Kugel, da hier die Berührungsebene auf dem Durchmesser senkrecht steht; er ist also auch für das Ellipsoid als affine Projektion der Kugel richtig.

Ableitung der Gleichung der Tangentialebene.

Es sei $P(x, y, z)$ irgend ein Punkt des Ellipsoides, also nach 2):

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 0$$

die Gleichung der zum Durchmesser OP konjugierten Durchmesserebene. (Die laufenden Koordinaten sind X, Y, Z).

Die parallele Tangentialebene muß mithin eine Gleichung von der Form haben:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} + h = 0,$$

wo h eine noch zu ermittelnde Konstante sein soll, welche durch die Bedingung bestimmt wird, daß diese Ebene auch durch $P(x, y, z)$ gehen muß. Daher auch:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + h = 0,$$

d. h. $h = -1$, da P auf dem Ellipsoid liegt.

Die Gleichung der Tangentialebene ist also:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0. \qquad \textbf{10)}$$

(Vgl. I, § 14).

Die Gleichung des Ellipsoides in Ebenenkoordinaten.

Nach 2), § 7 sind die drei Abschnitte der Tangentialebene auf den Koordinatenachsen:

$$p = \frac{a^2}{x}, \qquad q = \frac{b^2}{y}, \qquad r = \frac{c^2}{z}.$$

Die Koordinaten uvw der Tangentialebene [9), § 7] werden daher:

$$u = -\frac{x}{a^2}, \qquad v = -\frac{y}{b^2}, \qquad w = -\frac{z}{c^2}.$$

Kehrt man diese einfachen Formeln um:

$$x = -u \cdot a^2, \qquad y = -v \cdot b^2, \qquad z = -w \cdot c^2$$

und setzt in die Gleichung des Ellipsoids ein, so entsteht die Bedingung, daß eine Ebene $E(u, v, w)$ das gegebene Ellipsoid berühren soll, d. h. es entsteht die Gleichung dieser Fläche in Ebenenkoordinaten. Sie ist demnach:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0, \qquad \textbf{11)}$$

also auch vom zweiten Grade. Das Ellipsoid ist mithin (wie die anderen Flächen zweiter Ordnung auch) nicht allein von der zweiten Ordnung, sondern auch von der zweiten Klasse (vgl. I, § 22 sowie den Schluß von § 7 dieses Bandes).

Jede in einer Tangentialebene durch den Berührungspunkt gezogene Gerade ist eine Tangente des Ellipsoids. Um die Gesamtheit der Tangenten in unabhängiger analytischer Dar-

stellung zu gewinnen, fasse man eine Tangente l als Sekante auf, welche die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet. Es seien $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ irgend zwei Punkte von l, so daß nach 6). § 2 durch die Formeln:

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}, \qquad z = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1 - \lambda} \tag{12}$$

jeder Punkt von l dargestellt wird. Ist im besonderen ein etwaiger Schnittpunkt mit dem Ellipsoid zu bestimmen, so setze man in 1) ein. Nach Multiplikation mit $(1 - \lambda)^2$ und Auflösung der Klammern entsteht für λ die quadratische Gleichung:

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C = 0, \tag{13}$$

wo zur Abkürzung gesetzt worden:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} - 1, \\ B &= \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} - 1, \\ C &= \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Wenn l Tangente sein soll, so müssen die beiden Wurzeln von 13) zusammenfallen. Dies gibt die Bedingung:

$$AC - B^2 = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} - 1\right) \\ &\qquad - \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} - 1\right)^2 = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Wie aus der Ableitung zu entnehmen ist, stellt 15) den Ansatz vor, daß irgend zwei Punkte P_1 und P_2 auf ein und derselben Tangente des Ellipsoides liegen. Setzt man den einen, etwa P_1, als gegeben voraus, so muß demnach der andere auf dem Berührungskegel an das Ellipsoid mit P_1 als Spitze liegen. Da aber 15) in bezug auf jeden der beiden Punkte vom zweiten Grade ist, so folgt:

Das Ellipsoid wird von jedem Punkte im Raume durch einen Kegel zweiter Ordnung, also durch einen elliptischen Kegel projiziert.

Liegt die Spitze P_1 auf dem Ellipsoid, ist also $C = 0$, so verwandelt sich 15) in:

$$-\left(\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} - 1\right)^2 = 0, \qquad 16)$$

d. h. der Kegel verwandelt sich in eine Doppelebene, die offenbar mit der Berührungsebene zusammenfallen muß, wie ja auch durch Vergleichung mit 10) auf der Stelle zu ersehen ist. Liegt aber P_1 außerhalb des Ellipsoides, so ist 15), wenn $P_2(x_2 y_2 z_2)$ als „laufend" genommen wird, die Gleichung eines wirklichen elliptischen Kegels. Um nun den geometrischen Ort für die Berührungspunkte der Kanten zu erhalten, stelle man 15) mit der Gleichung:

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} - 1 = 0,$$

d. h. mit der Bedingung zusammen, daß P_2 auf dem Ellipsoid liege, so entsteht durch Kombination wieder die Gleichung 16), nur daß diesmal P_1 ein beliebiger Punkt im Raume ist. Daher:

Der Tangentialkegel berührt das Ellipsoid längs einer Ellipse, deren Ebene durch die Gleichung:

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} - 1 = 0 \qquad 17)$$

bestimmt wird, wenn $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten der Spitze und $x_2 y_2 z_2$ die Koordinaten irgend eines Berührungspunktes sein sollen.

Aber auch die Umkehrung ist natürlich richtig: Wenn das Ellipsoid durch irgend eine Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

geschnitten wird, so umhüllen die Tangentialebenen in den Schnittpunkten einen Kegel, dessen Spitze $P_1(x_1 y_1 z_1)$ durch die Formeln:

$$x_1 = -u a^2, \qquad y_1 = -v b^2, \qquad z_1 = -w c^2$$

bestimmt wird. Denn nimmt man diesen Punkt als Spitze eines Berührungskegels, so fällt die Ebene 17) mit der willkürlich angenommenen Ebene zusammen.

Die Bedingung, daß eine Gerade l ein Ellipsoid berührt, in Plückerschen Koordinaten. Da 15) erfüllt sein muß, wenn $P_1 P_2$ Tangente sein soll, so ist ohne weiteres

die Möglichkeit erwiesen, diese Gleichung so umzuformen, daß sie nur die sechs Plückerschen Koordinaten der Tangente l enthält, deren Ausdrücke man sich nach 1) und 4), § 10 ins Gedächtnis zurückrufen muß. Und in der Tat, wenn die Klammern aufgelöst, die sich forthebenden Glieder weggelassen und die anderen zweckmäßig zusammengezogen werden, so erhält 15) auf einmal eine ganz andere Gestalt, nämlich:

$$-\frac{(x_2-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y_2-y_1)^2}{b^2}-\frac{(z_2-z_1)^2}{c^2}+\frac{(y_1z_2-z_1y_2)^2}{b^2c^2}$$

$$+\frac{(z_1x_2-x_1z_2)^2}{c^2a^2}+\frac{(x_1y_2-y_1x_2)^2}{a^2b^2}=0,$$

oder nach Einführung der Plückerschen Koordinaten:

$$-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}+\frac{L^2}{b^2c^2}+\frac{M^2}{c^2a^2}+\frac{N^2}{a^2b^2}=0. \tag{18}$$

Diese Gleichung ist also der analytische Ausdruck für die Bedingung, daß eine Gerade:

$$l(X,\ Y,\ Z,\ L,\ M,\ N)$$

das Ellipsoid berühre. In diesem Sinne kann 18) auch als eine Form der Gleichung dieser Fläche angesehen werden, nämlich als Gleichung in Plückerschen Linienkoordinaten. Wie man sieht, ist auch diesmal der zweite Grad, wie in Punkt- und in Ebenenkoordinaten erzielt worden (vgl. übrigens § 10, S. 109).

Theorie von Pol und Polarebene. Die Theorie der konjugierten Durchmesser und Durchmesserebenen ist ein besonderer Fall der allgemeinen Polarentheorie, die sich unmittelbar von der Ebene (siehe I, § 22) auf den Raum erweitern läßt und deren Grundzüge daher hier nur kurz entwickelt werden mögen.

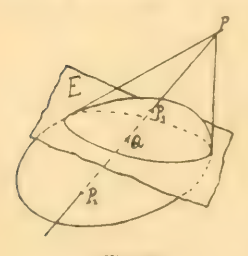


Fig. 28.

Wieder seien zwei Punkte $P(x_1y_1z_1)$ und $Q(x_2y_2z_2)$ gegeben (Fig. 28) und die Gleichung 13) für die Schnittpunkte P_1 und P_2 der Geraden PQ mit dem Ellipsoid aufgestellt. Nun aber werde nicht die Bedingung gesetzt, daß letztere zusammenfallen, sondern daß sie mit P und Q vier harmonische Punkte bilden. Dann müssen die

Wurzeln von 13) entgegengesetzt gleich sein, d. h. es muß sein:

$$B = \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} - 1 = 0. \qquad 19)$$

Man nennt dann P und Q konjugierte harmonische Pole des Ellipsoids (selbst wenn A und C gleiche Zeichen haben sollten, also die beiden Schnittpunkte P_1 und P_2 imaginär werden). Die Gleichung 19) ist in bezug auf jeden der beiden Punkte vom ersten Grade, also:

Die konjugierten Pole eines beliebigen Punktes $P(x_1 y_1 z_1)$ liegen in einer Ebene, welche man seine Polarebene nennt. Ihre Koordinaten u, v, w folgen durch die Formeln:

$$u = -\frac{x_1}{a^2}, \quad v = -\frac{y_1}{b^2}, \quad w = -\frac{z_1}{c^2}$$

oder, wenn jetzt der Index fortgelassen wird:

$$u = -\frac{x}{a^2}, \quad v = -\frac{y}{b^2}, \quad w = -\frac{z}{c^2}. \qquad 20)$$

Diese drei Gleichungen enthalten in analytischer Form die ganze Polarentheorie. Jedem Punkt $P(x, y, z)$ entspricht hiernach eine Ebene $E(u, v, w)$ und umgekehrt. Im besonderen ist der Mittelpunkt nichts anderes als der Pol der unendlich fernen Ebene, während andererseits irgend einem unendlich fernen Punkt die zu der Richtung nach ihm konjugierte Durchmesserebene entspricht. Ferner ist aus 17) und 20) zu schließen:

Die Berührungspunkte des von einem Punkte P ausgehenden Berührungskegels liegen auf der Polarebene von P.

Liegt ein Punkt P auf dem Ellipsoid, so geht die Polarebene durch ihn und fällt mit der Tangentialebene zusammen.

Polartetraeder. Es sei P_1 ein beliebiger Punkt im Raume und E_1 seine Polarebene. Man wähle in ihr irgendwo einen Punkt P_2, so sind P_1 und P_2 konjugiert. Die Polarebene E_2 von P_2 muß also durch P_1 hindurchgehen. E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden. Auf ihr wähle man einen dritten Punkt P_3, der nun zu P_1 und P_2 konjugiert ist und dessen Polarebene E_3 somit durch P_1 und P_2 hindurchgeht. E_1, E_2 und E_3 schneiden sich endlich in einem vierten Punkt P_4, dessen Polarebene E_4 durch P_1, P_2 und P_3 hindurchgeht

und also mit der durch diese drei Punkte bestimmten Ebene zusammenfällt.

So ist ein „sich selbst“ polares Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$ konstruiert worden, d. h. ein Tetraeder, in welchem jede Ecke der Pol der Gegenfläche ist. Ein solches polares Tetraeder und zwar dasjenige, für welches die Polarität zur Symmetrie wird, besteht aus den drei Hauptebenen des Ellipsoids, wenn die unendlich ferne Ebene als vierte hinzugezogen wird.

Man betrachte irgend eine Ebene E. Jeder Punkt P derselben hat seine Polarebene, welche E in einer Geraden l schneidet, woraus folgt, daß jeder auf l liegende Punkt zu P konjugiert ist. Innerhalb der Ebene E selbst reduziert sich also die räumliche polare Verwandtschaft zu einer ebenen, wie sie in I, § 22 so ausführlich erläutert worden ist. Der Kegelschnitt aber, in bezug auf welchen diese Verwandtschaft gilt, kann offenbar kein anderer sein, als der (reelle oder imaginäre) Schnitt von E mit dem Ellipsoid.

Wie es zu jedem Punkte P unzählig viele konjugierte Pole gibt, die alle in der Polarebene liegen, so kann man umgekehrt alle Ebenen, welche durch den Pol einer gegebenen Ebene E hindurchgehen, polar zu dieser Ebene nennen. Man betrachte daraufhin irgend einen Punkt P oder vielmehr das durch ihn als Zentrum bestimmte Ebenen- und Strahlenbündel. Jeder Ebene E dieses Bündels sind unzählig viele Ebenen desselben Bündels konjugiert, nämlich alle diejenigen, welche durch den Pol von E hindurchgehen. Sie bilden also ein Ebenenbüschel, dessen Achse l als Strahl genommen nun zu E in polarer Verwandtschaft steht, da umgekehrt jeder durch l gehenden Ebene ein in E liegender Strahl entspricht. Offenbar bezieht sich diese Verwandtschaft auf den von P ausgehenden (reellen oder imaginären) Berührungskegel. Wenn P mit dem Mittelpunkt M des Ellipsoides zusammenfällt, so geht sie wieder in die Beziehung zwischen Durchmesser und konjugierter Durchmesserebene über.

Polarität zwischen gerader Linie und gerader Linie.

Wenn ein Punkt $P(x, y, z)$ seine Lage ändert, so auch die Polarebene $E(u, v, w)$. Beschreibt P eine geradlinige Punktreihe l, so muß E ein Ebenenbüschel um eine andere Achse

l_1 beschreiben. Denn greift man auf l irgend zwei Punkte P_1 und P_2 heraus, so sind sie zu allen Punkten der Geraden l_1, in welcher sich die Polarebenen E_1 und E_2 schneiden, konjugiert. Also sind auch alle Punkte von l zu allen Punkten von l_1 konjugiert, d. h. die Polarebenen aller Punkte von l müssen durch l_1 hinduchgehen und umgekehrt. So entsteht die polare Verwandtschaft zwischen gerader Linie und gerader Linie, die noch etwas genauer zu betrachten ist.

Schneidet l das Ellipsoid, so nehme man die Schnittpunkte als die vorhin genannten Punkte P_1 und P_2. Die Polare l_1 ist also Schnittlinie der beiden Tangentialebenen in diesen Schnittpunkten. Schneidet aber l das Ellipsoid nicht, so gehen durch l zwei Tangentialebenen. Die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte ist also die Polare l_1.

Um aber auch analytisch diese Verwandtschaft zwischen l und l_1 darzustellen, seien zunächst $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ irgend zwei Punkte und $E_1(u_1 v_1 w_1)$, $E_2(u_2 v_2 w_2)$ ihre Polarebenen, so daß nach 20):

$$x_1 = -u_1 a^2, \quad y_1 = -v_1 b^2, \quad z_1 = -w_1 c^2,$$
$$x_2 = -u_2 a^2, \quad y_2 = -v_2 b^2, \quad z_2 = -w_2 c^2.$$

Nun bilde man nach 1) und 4) § 10 die Plückerschen Koordinaten von l und nach 11) § 10 diejenigen von l_1, also z. B.:

$$X = x_2 - x_1; \quad L_1 = u_2 - u_1.$$

Daher nach den Gleichungen 20):

$$L_1 = -\frac{X}{a^2}.$$

Geht man in derselben Weise auch mit den anderen Koordinaten vor, so entstehen nach Einführung eines an sich willkürlichen Faktors k die Beziehungen zwischen l und l_1:

$$\begin{aligned} L_1 &= -kb^2c^2 X, & M_1 &= -kc^2a^2 Y, & N_1 &= -ka^2b^2 Z, \\ X_1 &= ka^2 L, & Y_1 &= kb^2 M, & Z_1 &= kc^2 N. \end{aligned} \tag{21}$$

Aus diesen Formeln, die zu jeder Geraden l im Raume die polare Gerade l_1 bestimmen, entnimmt man unter anderem:

$$\frac{XX_1}{a^2} + \frac{YY_1}{b^2} + \frac{ZZ_1}{c^2} = k(XL + YM + ZN),$$

also nach der Identität 6), § 10:

$$\frac{XX_1}{a^2} + \frac{YY_1}{b^2} + \frac{ZZ_1}{c^2} = 0. \tag{22}$$

Da nun nach 2), § 10 X, Y, Z proportional zu den Richtungskosinus der Geraden l sind, so ist aus 3), § 18 zu schließen:

Irgend zwei konjugierte Gerade l und l_1 sind parallel zu konjugierten Durchmessern. (Was selbstverständlich auch rein geometrisch leicht nachweisbar ist).

Wann schneiden sich zwei konjugierte Gerade l und l_1? Um dies zu beantworten, greife man zur Formel 14a), § 10 für die Bedingung des Schneidens zurück und setze 21) ein. Es folgt nach Division durch $ka^2b^2c^2$:

$$-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}+\frac{L^2}{b^2c^2}+\frac{M^2}{c^2a^2}+\frac{N^2}{a^2b^2}=0,$$

d. h. nach 18):

Nur die Tangenten des Ellipsoides werden von ihren Polaren geschnitten.

Der Schnittpunkt ist der Berührungspunkt, da durch ihn die Polarebene jedes Punktes der Tangente hindurchgeht. Die Polare einer Tangente ist also wieder eine durch denselben Berührungspunkt gehende Tangente. So werden also alle in derselben Berührungsebene liegenden Tangenten paarweise einander zugeordnet, und zwar „involutorisch", da ja, wie eben bewiesen, zwei solche Tangenten parallel sind zu konjugierten Durchmessern derjenigen Ellipse, in welcher das Ellipsoid durch die parallele Durchmesserebene geschnitten wird.

Es gibt also auch für jeden Punkt P des Ellipsoides ein Paar zueinander senkrechte polare Tangenten, diejenigen nämlich, welche zu den Hauptachsen der genannten Ellipse parallel sind. Sie bestimmen in P die sogenannten Hauptrichtungen, welche in der Krümmungstheorie der Flächen*) als Richtungen der beiden Krümmungslinien eine so große Rolle spielen. Wie schon einmal bemerkt, haben im allgemeinen die durch die Normale der Fläche gehenden Schnitte in P ungleiche Krümmung, was hier dahin ergänzt werden mag, daß für die eine Hauptrichtung die Krümmung ein Maximum, für die andere ein Minimum wird. Nur für die Nabelpunkte sind

*) Die Theorie konjugierter Tangenten kann nämlich auf beliebige Flächen ausgedehnt werden, obgleich die allgemeine Polarentheorie nur für diejenigen zweiter Ordnung zutrifft.

diese Krümmungen alle gleich. Hier stehen auch alle polaren Tangenten aufeinander senkrecht, da die parallele Ellipse ein Kreis ist. — Man stelle sich allgemeiner alle durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehenden Tangenten vor. Ihre Polaren müssen in der Polarebene von P liegen und da sie andererseits auch Tangenten an das Ellipsoid sind, so berühren sie diejenige Ellipse, in welcher der Kegel das Ellipsoid berührt.

Selbstverständlich kann der wesentliche Inhalt dieses Paragraphen mit geringen Abänderungen auf alle Flächen zweiter Ordnung ausgedehnt werden; es mag für die beiden Hyperboloide nur noch die Bemerkung eingeschaltet werden, daß der Kegel 15), wenn man die Spitze mit dem Mittelpunkt zusammenfallen läßt, also $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ setzt, die Gleichung erhält:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Er wird zum Asymptotenkegel der Fläche (dem sich diese unbegrenzt annähert).

Übungsaufgaben.

1. In einem beliebigen Punkte $P(xyz)$ des Ellipsoids 1) wird die Normale, d. h. die Senkrechte auf der Berührungsebene gezogen. Es sind die Koordinaten der drei Schnittpunkte Q, R, S mit der yz-, der zx- und xy-Ebene zu ermitteln. Wie verhalten sich die drei Längen QP, RP, SP zueinander.

2. Es ist der Komplex aller derjenigen Geraden zu bestimmen, welche auf ihren Polaren senkrecht stehen. Alle Durchmesser, alle in den Hauptebenen liegenden und alle auf diesen senkrechten Geraden gehören zu dem Komplex. Ebenso alle Normalen der Fläche.

3. Man zeige, daß unzählig viele Flächen zweiter Ordnung denselben in der vorigen Aufgabe genannten Komplex besitzen und daß letzterer übereinstimmt mit der Gesamtheit aller Geraden, für welche die Schnittpunkte Q, R, S mit den Hauptebenen in einem gegebenen einfachen Verhältnis zueinander stehen.

4. Man stelle außer dem in 2) und 3) genannten Komplex noch einen anderen auf, der im besonderen alle Normalen der Fläche enthält, so daß diese Normalen als die gemeinsamen Strahlen der beiden Komplexe erscheinen.

Vierter Abschnitt.

§ 19 bis § 22.

---

§ 19.

Krümmung der Flächen. Die geraden Linien auf den Flächen zweiter Ordnung.

Man ist leicht geneigt, bei der Vorstellung einer „krummen“ Oberfläche den Typus der Kugel oder des Ellipsoids, kurz der „positiven“ oder „elliptischen“ Krümmung zugrunde zu legen. Wird zur Gewinnung einer kürzeren Ausdrucksweise die Berührungsebene in dem betrachteten Punkte P der Fläche horizontal angenommen, so geht bei diesem Typus die Krümmung in allen Azimuten nur nach oben oder nur nach unten. Die Berührungsebene berührt die Fläche in P, schneidet sie aber nicht, wenigstens nicht in unmittelbarer Umgebung dieses Punktes.

Ganz anders verhalten sich die negativ oder sattelförmig gekrümmten Flächen. Hier geht die Krümmung nicht in allen Azimuten nur nach oben oder nur nach unten, sondern teils nach oben, teils nach unten. (Sattel, Gebirgspaß). Die Berührungsebene muß daher die Fläche nicht allein in P berühren, sondern auch schneiden, und zwar, da die Azimute, in welchen die Krümmung nach oben geht, von denen, wo sie nach unten geht, doch getrennt sein müssen, in zwei sich in P schneidenden Richtungen, den sogenannten „asymptotischen“ Richtungen. Normalschnitte längs dieser Richtungen haben keine Krümmung. In zwei Scheitelwinkelräumen geht sie nach oben, in den beiden anderen nach unten.

Zwischen den positiv und den negativ gekrümmten Flächen stehen diejenigen, welche, wie man sagt, parabolisch ge-

krümmt sind, wie der Zylinder und der Kegel oder ganz allgemein die abwickelbare Fläche. (Siehe § 12). Hier fallen die beiden asymptotischen Richtungen zu einer einzigen zusammen; das eine Paar der Scheitelwinkelräume reduziert sich auf einen Strich, während in allen anderen Richtungen die Krümmung nur nach einer Seite geht.

Ausnahmen treten z. B. für solche Punkte ein, die keine eigentliche Tangentialebene haben, wie etwa die Spitzen der Kegel. Auch liegt die Möglichkeit auf der Hand, daß auf ein und derselben Fläche sowohl Gebiete mit positiver, als auch solche mit negativer Krümmung vertreten sein können, die im allgemeinen durch Linien voneinander abgegrenzt sein werden, auf welchen die Krümmung parabolisch ist. Man stelle sich z. B. die Ringfläche vor, die durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene, aber den Kreis nicht schneidende Achse entsteht. Außen ist offenbar positive, innen aber negative Krümmung und dazwischen liegen (oben und unten) die beiden hier kreisförmigen Grenzlinien mit parabolischer Krümmung.

Eine Fläche zweiter Ordnung aber ist nur einheitlich gekrümmt, also entweder nur positiv (Ellipsoid, zweischaliges Hyperboloid, elliptisches Paraboloid) oder nur negativ (einschaliges Hyperboloid und hyperbolisches Paraboloid) oder nur parabolisch (Zylinder und Kegel). Siehe Typus A, B und C in § 14, S. 154.

Die geraden Linien auf den Flächen zweiter Ordnung. Auf den Flächen zweiter Ordnung vom ersten Typus kann es offenbar gar keine (reelle) gerade Linie geben. Dagegen ist die Existenz zweier Scharen von ihnen für den zweiten Typus sofort auf folgende Weise, ganz abgesehen von den früheren Untersuchungen solcher Scharen in § 12, nachweisbar.

Wie vorhin erläutert, muß die Berührungsebene bei negativer Krümmung in die Fläche einschneiden, und zwar in zwei verschiedenen, im Berührungspunkt sich schneidenden Richtungen. Andererseits ist für eine Fläche zweiter Ordnung jeder ebene Schnitt eine Kurve zweiter Ordnung; er zerfällt also hier in zwei gerade Linien, da keine andere Kurve zweiter Ordnung zweimal durch denselben Punkt hindurchgeht.

Wie aber stellt man diese beiden Scharen von Geraden aus der gegebenen Gleichung der Fläche, also z. B. 5) oder 9), § 14 heraus analytisch dar? Auch hierfür läßt sich durch folgende Überlegung Rat schaffen!

Es sei l irgend eine Gerade der Fläche. Man betrachte sie als Schnitt zweier Ebenen:

$$\begin{aligned} U_1 &\equiv a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0, \\ U_2 &\equiv a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

so liegt die Sache doch so, daß, wenn die beiden Gleichungen 1) erfüllt sind, auch die Gleichung der Fläche erfüllt sein muß. Letztere Gleichung muß also als Folge von 1) ableitbar sein. Da sie aber vom zweiten Grade ist, die Gleichungen 1) aber nur den ersten Grad haben, so kann dies nur darauf hinauslaufen, daß es möglich sein muß, zwei andere lineare Faktoren:

$$V_2 \equiv a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3, \quad -V_1 \equiv a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 \tag{2}$$

aufzufinden, so daß nach Multiplikation und Addition die Gleichung der Fläche in der Form:

$$F(x, y, z) \equiv U_1 V_2 - V_1 U_2 = 0 \tag{3}$$

herauskommt.

Ist aber diese Form 3), in welcher U_1, U_2, V_1, V_2 nach 1) und 2) irgend vier lineare Ausdrücke sind, hergestellt, so leitet man die beiden Scharen von geraden Linien folgendermaßen ab. Aus 3) folgt:

$$\frac{U_1}{V_1} = \frac{U_2}{V_2}.$$

Wird der gemeinsame Wert dieser Brüche $= \lambda$ gesetzt, so ergibt sich:

$$U_1 - \lambda V_1 = 0, \quad U_2 - \lambda V_2 = 0. \tag{4}$$

Man kann aber auch setzen:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{V_1}{V_2} = \mu;$$

also:

$$U_1 - \mu U_2 = 0, \quad V_1 - \mu V_2 = 0. \tag{5}$$

In 4) ist die eine, in 5) die andere Linienschar gegeben. Denn setzt man in 4) für λ oder in 5) für μ irgend einen Wert, so entstehen zwei Ebenen, die sich in einer auf der Fläche liegenden Geraden schneiden. Man sieht auch,

daß zwei Gerade derselben Schar (im allgemeinen) zueinander windschief sind. Denn nimmt man z. B. für λ zwei verschiedene Werte λ_1 und λ_2 und bildet demnach die vier Gleichungen:

$$U_1 - \lambda_1 V_1 = 0,\ U_2 - \lambda_1 V_2 = 0,\ U_1 - \lambda_2 V_1 = 0,\ U_2 - \lambda_2 V_2 = 0,$$

so müssen die Koordinaten des etwaigen Schnittpunktes alle vier erfüllen. Aus ihnen folgt aber auch:

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad U_2 = 0, \quad U_2 = 0.$$

Es müßten also — was im allgemeinen, wenn U_1, U_2, V_1, V_2 vier beliebige lineare Ausdrücke sind, nicht zutreffen wird — diese vier Ebenen ebenfalls durch einen Punkt gehen. Dann aber gehen alle Linien 4) und 5) durch diesen Punkt, die Fläche ist ein Kegel und die beiden Scharen 4) und 5) fallen zusammen.

Sonst aber sind die Geraden ein und derselben Schar windschief. Dagegen wird jede Gerade der einen von jeder Geraden der anderen Schar geschnitten, wie daraus folgt, daß für jedes Wertepaar λ und μ aus drei der vier Gleichungen 4) und 5) die vierte folgt. Man kann dieselben zu der fortlaufenden Proportion vereinigen:

$$U_1 : U_2 : V_1 : V_2 = \lambda\mu : \lambda : \mu : 1$$

oder:

$$U_1 - \lambda\mu V_2 = 0, \quad U_2 - \lambda V_2 = 0, \quad V_1 - \mu V_2 = 0.$$

Diese drei Gleichungen, oder auch irgend drei der Gleichungen 4) und 5) bestimmen nach Einsetzen der Ausdrücke U_1, U_2, V_1, V_2 aus 1) und 2) die Koordinaten des Schnittpunktes.

In 4) sind zwei Ebenenbüschel, und zwar zwei beliebige Ebenenbüschel aufgestellt, die hier projektivisch aufeinander bezogen werden, da je zwei demselben Wert von λ zugehörende Ebenen beider Büschel entsprechen (vgl. I, § 23). Ein Gleiches gilt für 5). Also:

Irgend zwei projektivisch einander zugeordnete Ebenenbüschel mit windschiefen Achsen erzeugen, wenn entsprechende Ebenen zum Schnitt gebracht werden, eine Schar von Geraden einer Fläche zweiter Ordnung. Die beiden Achsen gehören der anderen Schar an.

Da ferner jedes der beiden Büschel die Achse des anderen in einer perspektiven, also auch projektivischen Punktreihe schneidet, so folgt:

Irgend zwei projektive geradlinige und zueinander windschiefe Punktreihen erzeugen, wenn entsprechende Punkte verbunden werden, eine Schar von Geraden einer Fläche zweiter Ordnung. Die Träger der gegebenen Punktreihen gehören der anderen Schar an.

Im allgemeinen ist die so erzeugte Fläche ein einschaliges Hyperboloid. Wenn aber die unendlich fernen Punkte der Punktreihen einander entsprechen, ihre Projektivität also zur Ähnlichkeit oder Kongruenz wird, so ist das Ergebnis ein hyperbolisches Paraboloid.

Wenn man alle Geraden einer Schar von irgend einem Punkte P im Raume durch Ebenen projiziert, so ist in jeder dieser Ebenen nur eine Gerade der Schar enthalten. Da aber andererseits eine Ebene überhaupt eine Fläche zweiter Ordnung in einer Kurve zweiter Ordnung schneiden muß, so kann diese Gerade nur ein Teil des Schnittes sein, und die Ebene muß die Fläche noch in einer zweiten, aber zur anderen Schar gehörenden Geraden schneiden. Die projizierenden Ebenen berühren mithin die Fläche, und zwar in den Schnittpunkten der beiden Geraden. Sie umhüllen also auch den von P aus an die Fläche gehenden Berührungskegel. Schneidet man diesen noch durch eine beliebige Ebene, so folgt:

Bei jeder nach den Prinzipien der darstellenden Geometrie hergestellten Zeichnung einer Fläche zweiter Ordnung fallen die Projektionen der beiden Linienscharen zusammen und erscheinen als Tangenten desjenigen Kegelschnittes, welcher die scheinbare Umgrenzung der Fläche bildet. (Fig. 29 und 30).

Dies muß auch richtig sein, wenn der Punkt P auf der Fläche selbst liegt. Es findet aber dann insofern eine Ausnahme statt, als dann die beiden durch P gehenden Geraden der Fläche sich in der Projektion als Punkte darstellen, während die übrigen Geraden der einen und der anderen Schar durch je einen dieser Punkte zu gehen scheinen und also in der Zeichnung zu zwei Strahlenbüscheln werden.

Läßt man aber P mit dem Mittelpunkt der Fläche zusammenfallen, so berührt der Kegel die Fläche erst in unendlicher Ferne. Also:

Jede Gerade der einen Schar ist parallel zu einer Geraden der anderen Schar und auch parallel zu einer Kante des Asymptotenkegels der Fläche.

Ist aber die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid, so liegt ihr Mittelpunkt unendlich fern in der Richtung der Achse und fällt mit dem Schnittpunkt der beiden unendlich fernen Geraden der Fläche zusammen. Es tritt also der vorhin erwähnte Ausnahmefall ein, der hier folgende Gestalt annimmt:

Projiziert man das hyperbolische Paraboloid durch Strahlen parallel zu seiner Achse auf eine beliebige Ebene, so erscheinen die Geraden jeder Schar parallel (zwei Parallelstrahlenbüschel). Oder auch: Die Geraden jeder Schar sind parallel zu ein und derselben Ebene.

Die Darstellung der Gleichung einer Fläche in der Form 3) macht gar keine Schwierigkeit, wenn man von den einfachen in § 14 angegebenen Formeln ausgeht. Denn z. B. für das einschalige Hyperboloid (Fig. 29) mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

oder (um für $k=0$ auch den Kegel zu erhalten):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-k^2=0$$

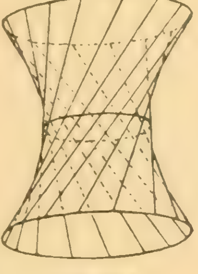


Fig. 29 a.

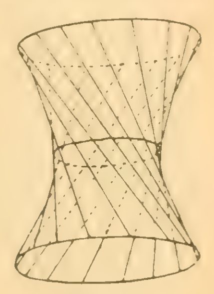


Fig. 29 b.

schreibe man also:

$$\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right)-\left(\frac{y}{b}+k\right)\left(\frac{y}{b}-k\right)=0$$

und setze also nach 3):

$$U_1\equiv\frac{z}{c}+\frac{x}{a},\quad U_2\equiv\frac{y}{b}+k,\quad V_1\equiv\frac{y}{b}-k,\quad V_2\equiv\frac{z}{c}-\frac{x}{a}.$$

Die beiden Scharen 4) und 5) werden also:

$$\frac{z}{c}+\frac{x}{a}-\lambda\left(\frac{y}{b}-k\right)=0,\quad \frac{z}{c}-\frac{x}{a}-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{y}{b}+k\right)=0, \qquad \text{4a)}$$

$$\frac{z}{c}+\frac{x}{a}-\mu\left(\frac{y}{b}+k\right)=0,\quad \frac{z}{c}-\frac{x}{a}-\frac{1}{\mu}\left(\frac{y}{b}-k\right)=0. \qquad \text{5a)}$$

Man bemerke zunächst, daß für $\lambda = \mu$ die Gleichungen 4a) und 5a) sich nur durch die Vorzeichen der Konstanten $\left(\pm \lambda k, \pm \frac{k}{\lambda}\right)$ unterscheiden. Die entsprechenden Geraden sind also parallel. Für $k = 0$ fallen dann 4a) und 5a) ganz und gar zusammen, d. h. für den Kegel vereinigen sich beide Scharen zu einer einzigen. Außerdem sind (siehe § 14) die Geraden des Hyperboloids auch parallel zu den Kanten des Asymptotenkegels ($k = 0$), wie bereits vorhin gezeigt.

Setzt man aber λ beliebig und μ auch beliebig, so müssen sich die beiden in 4a) und 5a) gegebenen Geraden schneiden. Zur Berechnung des Schnittpunktes setze man die beiden aus 4a) und 5a) folgenden Werte von $\frac{z}{c} + \frac{x}{a}$ oder auch von $\frac{z}{c} - \frac{x}{a}$ einander gleich. Man erhält beide Male dasselbe, nämlich:

$$\lambda\left(\frac{y}{b} - k\right) = \mu\left(\frac{y}{b} + k\right),$$

und hieraus:

$$y = kb\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}.$$

Führt man diesen Wert in 4a) oder 5a) ein und berechnet durch Addition und Subtraktion x und z, so folgt, wenn nun wieder $k = 1$ gesetzt wird:

$$x = a\frac{\lambda\mu - 1}{\lambda - \mu}, \quad y = b\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}, \quad z = c\frac{\lambda\mu + 1}{\lambda - \mu}. \qquad 6)$$

Diese Gleichungen 6) enthalten zugleich (§ 5) eine überraschend einfache Parameterdarstellung des einschaligen Hyperboloids, wobei man sich übrigens hinterher leicht überzeugen kann, daß die Gleichung desselben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

nach Einsetzen von 6) identisch erfüllt wird. Wie zu erwarten, sind die Formeln 6) sowohl in bezug auf λ, als auch in bezug auf μ vom ersten Grade (bilinear), da, wenn man λ konstant

setzt und μ variiert, oder umgekehrt, der laufende Punkt sich auf einer Geraden der einen oder der anderen Schar bewegt

Für das hyperbolische Paraboloid (Fig. 30):

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

setze man $2p = k^2$, $2q = l^2$, forme die Gleichung um in:

$$z \cdot 1 - \left(\frac{x}{k} + \frac{y}{l}\right)\left(\frac{x}{k} - \frac{y}{l}\right) = 0$$

und setze nach 3):

$$U_1 = z, \quad U_2 = \frac{x}{k} + \frac{y}{l}, \quad V_1 = \frac{x}{k} - \frac{y}{l}, \quad V_2 = 1.$$

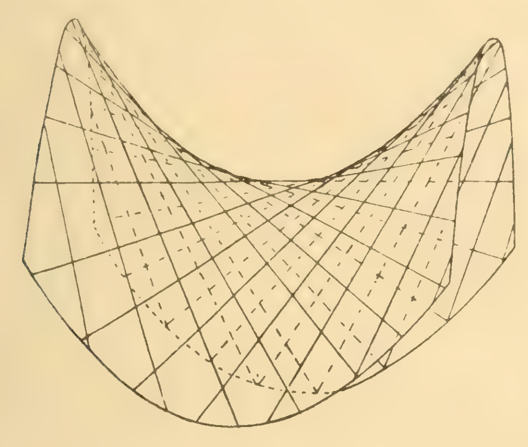


Fig. 30.

Die Formeln 4) und 5) werden also:

$$\frac{x}{k} - \frac{y}{l} - \frac{z}{\lambda} = 0, \quad \frac{x}{k} + \frac{y}{l} - \lambda = 0, \qquad \textbf{4b)}$$

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} - \frac{z}{\mu} = 0, \quad \frac{x}{k} - \frac{y}{l} - \mu = 0. \qquad \textbf{5b)}$$

Da die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{k} + \frac{y}{l} - \lambda = 0, \quad \frac{x}{k} - \frac{y}{l} - \mu = 0$$

kein z enthalten, so ergeben sie die Projektion der beiden Linienscharen auf die xy-Ebene, und da, wie man sieht, hier der Parameter λ oder μ nur in den Konstanten enthalten ist,

so sind die Projektionen der Linien jeder Schar einander parallel, wie bereits früher erwiesen.

Der Versuch, die Gleichung einer positiv gekrümmten Fläche zweiter Ordnung, etwa des Ellipsoids:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

auf die Form 3) zu bringen, gelingt nur bei Einführung imaginärer Faktoren, z. B.:

$$\left(i\frac{z}{c} + \frac{x}{a}\right)\left(i\frac{z}{c} - \frac{x}{a}\right) - \left(\frac{y}{b} + 1\right)\left(\frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

Es kann auch gar nicht anders sein, da hier keine Geraden auf der Fläche existieren oder da sie vielmehr imaginär sind. Bei dem auf S. 154 besprochenen Übergang vom einschaligen Hyperboloid durch den Asymptotenkegel zum zweischaligen Hyperboloid sieht man übrigens deutlich, wie zunächst die beiden Scharen zusammenfallen, um darauf beide zugleich imaginär zu werden.

Die Gleichungen 21), § 18 für polare gerade Linien l und l_1 liefern übrigens auch auf natürlichste Weise einen Ansatz zur Ermittelung der geraden Linien, der sehr leicht ausgebeutet werden kann. Man stelle nämlich die Frage nach solchen Geraden, die sich etwa selbst polar sind. Eine solche Gerade l hat die Eigenschaft, daß die Polarebene jedes auf ihr gelegenen Punktes P durch l hindurchgeht, woraus folgt, daß jeder Punkt P von l, d. h. l selbst auf der Fläche liegt.

Wird der Ansatz $X_1 = X$, $Y_1 = Y$ usw. in 21), § 18 gemacht, so folgt für das Ellipsoid:

$$k^2a^2b^2c^2 = -1,\ k = \pm\frac{i}{abc}.$$

Für das einschalige Hyperboloid wird dagegen:

$$k = \pm\frac{1}{abc},$$

und jedem der beiden Vorzeichen entspricht eine der beiden Scharen (als gemeinsame Strahlen dreier linearer Komplexe). (Siehe § 12.)

Wie in § 18 erläutert, erhält man bei Zuordnung polarer Tangenten für jeden Punkt P der Fläche ein involutorisches

Strahlenbüschel, in welchem die Haupttangenten das aufeinander senkrechte Paar bilden. Die beiden durch P gehenden Geraden l und l_1 der Fläche sind somit die sich selbst entsprechenden Strahlen dieser Involution, woraus übrigens noch folgt, daß die Haupttangenten, also die Richtungen größter und kleinster Krümmung, die Winkel zwischen l und l_1 halbieren.

Übungsaufgaben.

1. Es soll das Büschel aller Flächen zweiter Ordnung aufgestellt werden, welche durch die vier Kanten AB, BC, CD, DA eines windschiefen Vierecks $ABCD$ hindurchgehen. Im besondern ist das hierher gehörende Paraboloid zu bestimmen. Wie wird dasselbe am einfachsten konstruiert? Aus dieser Konstruktion nachzuweisen, daß das Paraboloid durch den Schwerpunkt des Tetraeders $ABCD$ gehen muß.

2. Gegeben sei die Fläche $UV_1 - VU_1 = 0$, wo U, U_1, V, V_1 irgend vier lineare Funktionen von x, y und z sind. Dann stellt jede Gleichung von der Form:
$$UV_1 - VU_1 + aU^2 + bUV + cV^2 = 0,$$
wo a, b, c beliebig gegeben sind, eine Fläche zweiter Ordnung dar, welche die erstere längs der Erzeugenden $U = 0$, $V = 0$ berührt.

3. Gegeben irgend zwei zueinander windschiefe Gerade l und l_1 im Raume. Ist es möglich, zwei einschalige Rotationshyperboloide, das eine um l, das andere um l_1 als Achse so zu konstruieren, daß sie sich längs einer Kante überall berühren? (Theorie der Hyperboloidräder zur unmittelbaren Übertragung der Drehung auf windschiefe Achsen.)

§ 20.

Die berührenden Kreiskegel an Flächen zweiter Ordnung. Fokalellipse und Fokalhyperbel. Konfokale Flächen.

Die unmittelbare Übertragung der Brennpunkte von den Kurven auf die Flächen zweiter Ordnung führt offenbar nur auf Umdrehungsflächen. Wenn zwei feste Punkte im Raume gegeben sind und der geometrische Ort aller Punkte gesucht wird, für welche die Summe oder die Differenz der Abstände von ihnen konstant ist, so wird eben ein verlängertes Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid gefunden.

Im allgemeinen Falle aber, z. B. für ein dreiachsiges Ellipsoid, liegen die Fokaleigenschaften ganz und gar nicht so offen zutage, und es waren daher tiefgehende Forschungen nötig, um sie klar übersehen zu können. Auch war man zunächst auf Umwege angewiesen, da noch gar nicht ausgemacht war, in welcher Form und bis zu welchem Grade die Übertragung möglich ist.

Berührende Kreiskegel. Am schnellsten führt die sehr einfache und natürliche Frage, ob es unter allen Kegeln, die ein gegebenes Ellipsoid berühren, auch Kreiskegel gibt, in diese schöne Theorie hinein. Offenbar steht diese Frage in reziproker Verwandtschaft zu der früher gelösten nach den Kreisschnitten: doch geben letztere keinen Rückhalt zur Bestimmung der Kreiskegel, da diejenigen Kegel, welche das Ellipsoid längs eines Kreises berühren, elliptische Kegel sind, während andererseits die Kreiskegel das Ellipsoid längs Ellipsen berühren. (Es sei denn, daß die Fläche eine Umdrehungsfläche ist, für welche beide Arten von Kegeln zusammenfallen.)

Es werde also ein Ellipsoid gegeben. Nach 15), § 18 wird die Gleichung des Berührungskegels von einem beliebigen Punkte P im Raum bestimmt. Bezeichnet man jetzt die Koordinaten der Spitze P einfach mit xyz, diejenigen des berührenden Kegels aber mit XYZ und setzt zur Vereinfachung der Schreibweise:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=A; \quad -\frac{x}{a^2}=u, \quad -\frac{y}{b^2}=v, \quad -\frac{z}{c^2}=w, \qquad 1)$$

so lautet die Gleichung des Kegels:

$$\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)A-(uX+vY+wZ+1)^2=0.$$

Die Glieder zweiten Grades sind darnach:

$$\begin{aligned} X^2\left(\frac{A}{a^2}-u^2\right)+Y^2\left(\frac{A}{b^2}-v^2\right)+Z^2\left(\frac{A}{c^2}-w^2\right) \\ -2XYuv-2YZvw-2ZXwu. \end{aligned} \qquad 2)$$

Es ist also hier [vgl. I), § 15, S. 159]:

$$\begin{aligned} a_{11}&=\frac{A}{a^2}-u^2, & a_{22}&=\frac{A}{b^2}-v^2, & a_{33}&=\frac{A}{c^2}-w^2, \\ a_{12}&=-uv, & a_{23}&=-vw & a_{31}&=-wu. \end{aligned} \qquad 3)$$

Nun wende man die Kriterien 20), § 14, S. 157 für Umdrehungsflächen an:

$$a_{11}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{12}a_{23}}{a_{31}}=a_{33}-\frac{a_{23}a_{31}}{a_{12}}. \qquad 4)$$

Sie ergeben hier sehr einfach:

$$\frac{A}{a^2}=\frac{A}{b^2}=\frac{A}{c^2}.$$

Wenn also nicht $a = b = c$, d. h. wenn nicht das Ellipsoid eine Kugel und jeder Berührungskegel zum Kreiskegel wird, so muß hiernach sein:

$$A = 0, \quad \text{d. h. nach 1):} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

d. h. die Spitze des Kegels muß auf dem Ellipsoid liegen.

Dies ist freilich richtig, weil dann der Kegel in die doppelt zu zählende Berührungsebene ausartet und man die Ebene, wenn man will, auch als einen Kreiskegel bezeichnen kann. Aber ebenso richtig ist wohl auch, daß bei der Frage nach den berührenden Kreiskegeln diese Lösung nicht in Betracht kommt und nicht gewollt ist.

Man sieht, daß auch die trockenen Formeln zuweilen ad absurdum führen. Aber wo sind denn nun die wirklichen Kreiskegel eigentlich geblieben, da unsere Analyse nur zu den Pseudokreiskegeln, alias Berührungsebenen geführt hat?

Es muß also wohl noch eine kleine Lücke in dieser Analyse vorhanden sein, durch welche die gesuchten Kreiskegel unversehens uns entschlüpft sind. Und in der Tat ist eine solche in § 14 angezeigt worden, die nämlich, daß zwei der drei Koeffizienten:

$$a_{13}, \quad a_{23}, \quad a_{31}$$

verschwinden, worauf die Bedingungen 4) illusorisch, d. h. von der Form $\frac{0}{0}$ werden. Man mache daher nach 3) z. B. den Ansatz:

$$u = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = 0,$$

d. h. P liege in der yz-Ebene. Es wird dann $a_{12} = a_{13} = 0$ und nach 20a), § 14 lautet in diesem Falle die Bedingung für einen Kreiskegel:

$$(a_{22} - a_{11})(a_{33} - a_{11}) - a_{23}{}^2 = 0,$$

also hier, da $u = 0$:

$$\left[A\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) - v^2\right]\left[A\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) - w^2\right] - v^2 w^2 = 0.$$

Werden die Klammern aufgelöst, so erhalten alle Glieder, nachdem $+ v^2 w^2$ gegen $- v^2 w^2$ gehoben, den Faktor A, der sich hier noch einmal vordrängt. Wird er entfernt, so bleibt übrig:

$$A\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) - v^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) - w^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) = 0.$$

Hier hat man nun für A, v, w nach 1) ihre Werte einzusetzen ($u = 0$). Dividiert man noch durch $\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)$ so folgt:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 - \frac{y^2}{b^4\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)} - \frac{z^2}{c^4\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)} = 0$$

oder endlich:

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0.$$

Führt man in derselben Weise die ebenso berechtigten Ansätze: $y = 0$, $z = 0$ durch, so werden die folgenden drei

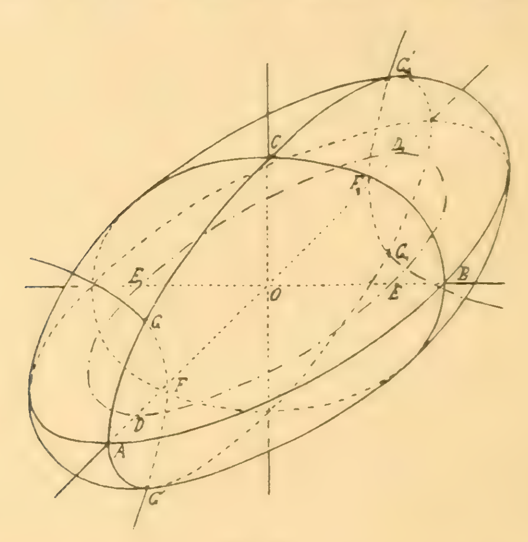


Fig. 31.

Möglichkeiten für die Spitzen von berührenden Kreiskegeln gewonnen (Fig. 31):

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} - 1 = 0. \tag{6}$$

$$y = 0, \quad \frac{z^2}{c^2 - b^2} + \frac{x^2}{a^2 - b^2} - 1 = 0. \tag{7}$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0. \tag{8}$$

Es sei wieder $a > b > c$. Dann ist 6) eine in der Ebene der mittleren und kleinsten Hauptachse liegende imaginäre Ellipse und scheidet also aus. 7) ist eine in der Ebene der größten und kleinsten Achse liegende Hyperbel. Ihre reelle Halbachse a', ihre imaginäre Halbachse b' und ihre Exzentrizität e' werden nach 7) durch die Formeln bestimmt:

$$a'^2 = a^2 - b^2, \quad b'^2 = b^2 - c^2, \quad e'^2 = a'^2 + b'^2 = a^2 - c^2. \quad \text{7a)}$$

Aus der letzten Gleichung folgt übrigens, daß die Hyperbel 7) zu dem zugehörenden Hauptschnitt des Ellipsoids:

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

konfokal ist, denn auch hier findet man:

$$e^2 = a^2 - c^2.$$

Die Scheitel der Hyperbel 7) liegen innerhalb des Ellipsoids. Sie schneidet die Fläche in vier Punkten G, G', G_1, G'_1, und zwar, wie man durch Einsetzen von 10), § 17 in 7) bestätigt, in den vier Nabel- oder Kreispunkten. Sie tritt dort senkrecht aus dem Ellipsoid heraus, da sich konfokale Ellipsen und Hyperbeln senkrecht schneiden.

Die Kurve 8) ist eine in der Ebene der größten und der mittleren Achse gelegene Ellipse DED_1E_1. Für ihre große und kleine Halbachse a'' und b'' und ihre Exzentrizität e'' findet man:

$$a''^2 = a^2 - c^2, \quad b''^2 = b^2 - c^2, \quad e''^2 = a''^2 - b''^2 = a^2 - b^2. \quad \text{8a)}$$

Die Ellipse 8) ist daher zum Hauptschnitt der Fläche:

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

konfokal. Da $a'' < a$, $b'' < b$, so liegt sie innerhalb des Ellipsoids und die zugehörigen Kreiskegel werden imaginär.

Es bleibt daher als Ort für die Spitzen reeller Kreiskegel nur die in der Ebene der größten und kleinsten Achse liegende Hyperbel 7) übrig, soweit sie außerhalb der Fläche läuft. Es sei $P(x, 0, z)$ ein beliebiger Punkt der Hyperbel 7). Um die Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ der Achse des zugehörigen Kreiskegels zu bestimmen, bringe man die quadratischen Glieder der Form 2) nach Vorschrift von 17), § 14 in die Gestalt:

$$\lambda(X^2 + Y^2 + Z^2) + k(mX + nY + pZ)^2.$$

Man findet nach Ausführung der etwas mühsamen Rechnung:

$$m:n:p = \frac{z}{b^2 - c^2} : 0 : \frac{x}{a^2 - b^2}$$

und daher auch:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{z}{b^2 - c^2} : 0 : \frac{x}{a^2 - b^2}.$$

$\cos\beta = 0$, d. h. die Achse des Kegels liegt in der xz-Ebene, wie nicht anders zu erwarten. Bezeichnet man mit φ ihren Richtungswinkel, bezogen auf die $+x$-Achse als Anfangsrichtung, so folgt nach 8a), § 1:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{x(b^2 - c^2)}{z(a^2 - b^2)}.$$

Denselben Richtungswinkel erhält man aber auch für die Tangente an die Hyperbel 7) in P (siehe I, § 15). Daher:

Die Achse des Kreiskegels fällt mit der Tangente der Hyperbel 7) zusammen*).

Konfokale Flächen. Die drei Kegelschnitte 6), 7), 8) bezeichnet man auch als Fokalkurven des Ellipsoids. Sie entsprechen in sehr vielen Beziehungen den Brennpunkten der Ellipse. Wie diese auf Hyperbel und Parabel, so können jene auf die anderen Flächen zweiter Ordnung übertragen werden.

Konfokale Flächen. Ein Blick auf die Gleichungen 6), 7), 8) lehrt, daß zu denselben Fokalkurven eine ganze Schar von Flächen zweiter Ordnung gehört. Denn 6), 7) und 8) bleiben unverändert, wenn statt a^2, b^2, c^2 gesetzt werden:

$$a^2 + \lambda, \quad b^2 + \lambda, \quad c^2 + \lambda, \tag{9}$$

wo λ ganz willkürlich bleibt. Sind die Größen 9) alle drei positiv, d. h. ist $\lambda > -c^2$, so ist die Fläche ein Ellipsoid. Liegt aber λ zwischen $-c^2$ und $-b^2$, in welchem Falle es künftig μ

*) Der hier nur flüchtig angedeutete analytische Beweis dieses Satzes kann durch den folgenden geometrischen ersetzt werden: Die beiden Tangenten von P an dem in der xz-Ebene liegenden Hauptschnitt des Ellipsoids sind zwei Kanten des Kreiskegels, und zwar gegenüberliegende. Die Kegelachse muß daher ihren Winkel halbieren. Nun ist aber die Winkelhalbierende zweier Tangenten einer Ellipse (I, § 14) zugleich Winkelhalbierende der beiden Brennstrahlen. Letztere aber sind auch Brennstrahlen der Hyperbel 7), da diese mit dem Hauptschnitt konfokal liegt, wie vorhin gezeigt. Folglich fällt nach I, § 15 die Kegelachse mit der Tangente der Hyperbel zusammen.

genannt werden mag, so wird ein einschaliges Hyperboloid zwischen $-b^2$ und $-a^2$ — dann ν genannt — ein zweischaliges Hyperboloid bestimmt. (Ist $\lambda < -a^2$, so ein imaginäres Ellipsoid.)

Alle diese Flächen nennt man konfokal. Ihr System wird durch folgende Gleichungen gegeben:

Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0 \quad (\infty > \lambda > -c^2). \qquad \mathbf{10)}$$

Einschaliges Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}-1=0 \quad (-c^2 > \mu > -b^2). \qquad \mathbf{11)}$$

Zweischaliges Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}-1=0 \quad (-b^2 > \nu > -a^2). \qquad \mathbf{12)}$$

a) Die Ellipsoide. Greift man ein beliebiges heraus und bezeichnet seine Halbachsen mit a_1, b_1, c_1, so wird:

$$a_1=\sqrt{a^2+\lambda}, \quad b_1=\sqrt{b^2+\lambda}, \quad c_1=\sqrt{c^2+\lambda}, \qquad \mathbf{13a)}$$

und seine Gleichung ist.

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}-1=0. \qquad \mathbf{14)}$$

Für $\lim \lambda = \infty$ nähert sich das Ellipsoid unbegrenzt der Kugelform, da:

$$\lim (a_1-b_1)=\lim \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1+b_1}=\frac{a^2-b^2}{\lim (a_1+b_1)}=\frac{a^2-b^2}{\infty}=0 \quad \text{usw.}$$

Je kleiner λ, desto größer wird der Unterschied der Achsen. Wird $\lambda=0$, so entsteht wieder das anfänglich gegebene Ellipsoid, das aber nunmehr keine besondere Rolle spielt, vielmehr als ein beliebiges Individuum unter einer unendlichen Schar 10) erscheint. Nähert man sich aber dem anderen Grenzwert $\lambda=-c^2$, so wird:

$$a_1=\sqrt{a^2-c^2}, \quad b_1=\sqrt{b^2-c^2}, \quad c_1=0.$$

Während also an der einen Grenze der Ellipsoide eine (unendlich große) Kugel steht, befindet sich an der anderen Grenze eine vollständig zur (doppelt zu zählenden) Innenfläche

einer Ellipse abgeplattete Fläche. Diese Ellipse ist aber nach 8) keine andere als die Fokalellipse, welche nun in einem neuen Licht als Grenzkurve der konfokalen Ellipsoide erscheint.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die Schar 10) den ganzen Raum ausfüllt, so daß augenscheinlich durch jeden Punkt P des Raumes nur eines der Ellipsoide hindurchgeht.

b) Die einschaligen Hyperboloide. Greift man ein beliebiges heraus, bezeichnet seine reellen Halbachsen mit a_2 und b_2, seine imaginäre Halbachse mit c_2, so wird:

$$a_2 = \sqrt{a^2 + \mu}, \quad b_2 = \sqrt{b^2 + \mu}, \quad c_2 = \sqrt{-(c^2 + \mu)}. \qquad \textbf{13b)}$$

Da a_2 und b_2 kleiner als die Halbachsen der Ellipse 8), so liegt die Kehlellipse innerhalb der Fokalellipse. Für den ersten Grenzwert $\mu = -c^2$ artet das Hyperboloid in die doppelt zu zählende Außenfläche der Fokalellipse aus, so daß in der Tat ein stetiger Übergang von dem letzten Ellipsoid 10) zu dem ersten Hyperboloid 11) durch diese Grenzkurve stattfindet. Ändert sich μ von $-c^2$ bis $-b^2$, so werden die hyperbolischen Hauptschnitte allmählich steiler, während sich gleichzeitig die Kehlellipse verengert. Der andere Grenzwert $\mu = -b^2$ gibt:

$$a_2 = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad b_2 = 0, \quad c_2 = \sqrt{b^2 - c^2},$$

also auch ein vollständig abgeplattetes einschaliges Hyperboloid, aber abgeplattet in demjenigen von der Fokalhyperbel 7) begrenzten Teil der xz-Ebene, welcher die imaginäre Achse enthält.

Auch diese Flächenschar 11) erfüllt den ganzen Raum, so daß durch jeden Punkt des Raumes nur eines der einschaligen Hyperboloide hindurchgeht.

c) Die zweischaligen Hyperboloide. Greift man eines derselben heraus, bezeichnet seine reelle Halbachse mit a_3 und seine imaginären Halbachsen mit b_3 und c_3, so wird:

$$a_3 = \sqrt{a^2 + \nu}, \quad b_3 = \sqrt{-(b^2 + \nu)}, \quad c_3 = \sqrt{-(c^2 + \nu)}. \qquad \textbf{13c)}$$

Für den ersten Grenzwert $\nu = -b^2$ sind die beiden Schalen vollständig abgeplattet und fallen mit den beiden Innenflächen der Fokalhyperbel 7) zusammen. Wenn sich μ von $-b^2$ bis $-a^2$ verändert, so blähen sich die beiden Schalen auf, während zugleich, da a_3 kleiner wird, die beiden Scheitel näher zusammenrücken. Hat μ den andern Grenzwert $\mu = -a^2$

erreicht, so fallen die Schalen zusammen, die Fläche plattet sich in die doppelt zu zählende yz-Ebene ab, in welcher die imaginäre Fokalkurve 6) liegt. Auch die Flächen dieser Schar **erfüllen den ganzen Raum.**

Diese konfokalen Flächen 10), 11), 12), deren räumliche stetige Folge somit auf das innigste mit den Fokalkurven als Grenzkurven zusammenhängt, besitzen eine seltene Fülle ausgezeichneter geometrischer Eigenschaften, die man bei zahlreichen Anwendungen in Problemen der Geometrie (z. B. Krümmungslinien, geodätische Linien, Oberfläche des Ellipsoids) und der Mechanik und Physik (freie Achsen eines Körpers für jeden Punkt des Raumes, Anziehung eines homogenen Ellipsoids auf einen Massenpunkt, gewisse stationäre Bewegungen in Flüssigkeiten usw.) benutzt hat. Die einfachsten und wichtigsten sind folgende.

Satz I. Durch jeden Punkt P (xyz) des Raumes geht je eine Fläche der Scharen 10), 11), 12).

Einen einfachen analytischen Beweis dieses Satzes, dessen Richtigkeit wohl nach den vorangegangenen Untersuchungen über den Verlauf dieser Flächen im Raume einleuchtet, gibt die Gleichung 10) selbst, wenn vorläufig kein Unterschied zwischen λ, μ, ν gemacht, der Punkt P eingesetzt wird und die Nenner entfernt werden. Dann entsteht eine Gleichung dritten Grades für λ, deren linke Seite $\varphi(\lambda)$ negativ, positiv, negativ und wieder positiv wird, wenn man für λ der Reihe nach $+\infty$, $-c^2$, $-b^2$, $-a^2$ setzt. Eine Wurzel liegt daher zwischen $+\infty$ und $-c^2$ (sie gibt die durch P gehende Fläche 10), eine zweite zwischen $-c^2$ und $-b^2$ [gibt 11)] und die dritte zwischen $-b^2$ und $-a^2$ [gibt 12)].

Satz II. Irgend zwei zur selben Schar gehörende konfokale Flächen schneiden sich nicht; wohl aber wird jede Fläche einer Schar von jeder Fläche der anderen Schar in einer Kurve geschnitten. Irgend drei zu verschiedenen Scharen gehörende Flächen schneiden sich in acht zu den Koordinatenebenen symmetrisch liegenden Punkten.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz I. Die zweite und dritte beweist man folgendermaßen: Man denke

sich in 10), 11), 12) für λ, μ und ν innerhalb der angegebenen Grenzen beliebige Werte eingesetzt und löse nach x^2, y^2 und z^2 auf. Eliminiert man aus 10) und 11) und darauf aus 10) und 12) zunächst z (indem mit $c^2+\lambda$, $c^2+\mu$, $c^2+\nu$ multipliziert, subtrahiert und dann durch $\lambda-\mu$ bzw. $\lambda-\nu$ dividiert wird), so wird gefunden:

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2(b^2-c^2)}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}-1=0.$$

$$\frac{x^2(a^2-c^2)}{(a^2+\lambda)(a^2+\nu)}+\frac{y^2(b^2-c^2)}{(b^2+\lambda)(b^2+\nu)}-1=0.$$

Nun eliminiere man noch y^2 durch Multiplikation mit $b^2+\mu$, $b^2+\nu$, Subtraktion und Heben von $\mu-\nu$. Man erhält:

$$\frac{x^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}-1=0.$$

Hieraus ist x^2 zu entnehmen. Die Ausdrücke für y^2 und z^2 ergeben sich ebenso. Also:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \qquad\qquad 15) \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}$$

Wird berücksichtigt, daß $a>b>c$, und daß für λ, μ, ν die in 10), 11) und 12) gesetzten Grenzen vorhanden sind, so ersieht man sofort, daß die drei Brüche rechts positiv sind. Denn im ersten Bruch werden alle fünf Faktoren positiv, im zweiten drei positiv, zwei negativ und im dritten einer positiv, vier negativ. Nach Ausziehen der Quadratwurzel erhält man demnach den acht Vorzeichenkombinationen entsprechend die acht Schnittpunkte.

Bei Variieren von ν zwischen $-b^2$ und $-a^2$, während λ und μ konstant bleiben, entsteht aus 15) eine Parameterdarstellung der Schnittkurve von 10) und 11), also einer reellen Kurve, da, wie gezeigt, innerhalb dieser Grenzen die drei Brüche positiv bleiben. Ein gleiches gilt für 11) und 12) und für 12) und 10).

A n m e r k u n g: Man versuche, aus 10), 11), 12) nachstehende Gleichung zu bilden:

$$x^2\varphi(a^2)+y^2\varphi(b^2)+z^2\varphi(c^2)-A=0, \qquad 16)$$

in welcher $\varphi(u)$ folgende Funktion von u bedeutet (A, B und C willkürlich):

$$\varphi(u) = \frac{Au^2 + Bu + C}{(u+\lambda)(u+\mu)(u+\nu)}.$$

Wird der Zähler z. B. $= (u+\mu)(u+\nu)$ genommen, so entsteht 10), wird er $= (u-b^2)(u-c^2)$ genommen, so die erste der Gleichungen 15) usw.

Satz III. Jede Fläche einer Schar wird von jeder Fläche einer anderen Schar überall senkrecht geschnitten, d. h. die Tangentialebenen bzw. die Normalen in irgend einem Schnittpunkt stehen aufeinander senkrecht. Die drei Flächensysteme sind zueinander „orthogonal". (Vgl. I, § 25.)

Man nehme etwa ein Ellipsoid 10) und ein Hyperboloid 11) (Fig. 32 und Fig. 33). Es sei $P(xyz)$ ein Schnittpunkt beider

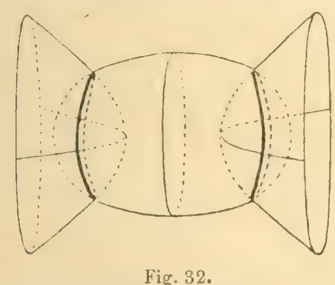


Fig. 32.

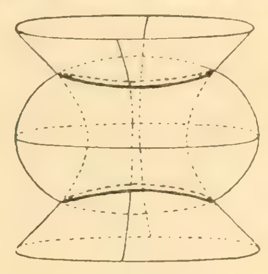


Fig. 33.

Flächen. Die Gleichungen der beiden Tangentialebenen sind dann nach 10), § 18:

$$\frac{Xx}{a^2+\lambda} + \frac{Yy}{b^2+\lambda} + \frac{Zz}{c^2+\lambda} - 1 = 0,$$

$$\frac{Xx}{a^2+\mu} + \frac{Yy}{b^2+\mu} + \frac{Zz}{c^2+\mu} - 1 = 0.$$

Sollen sie senkrecht aufeinanderstehen, so muß nach 2), § 8, S. 81 die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)} = 0,$$

und diese Bedingung muß sich sogar als eine unmittelbare Folge von 10) und 11) nachweisen lassen, wenn sich die Flächen längs ihrer Schnittkurven überall senkrecht durchdringen, wie der Satz III behauptet. In der Tat findet man sie ohne große Umschweife aus 10) und 11) durch Subtraktion nach Fort-

lassung des Faktors $\lambda - \mu$. (Oder aus 16), wenn der Zähler von $\varphi(u) = u + \nu$ gesetzt wird.)

Insbesondere schneiden sich also auch die drei Tangentialebenen der drei durch einen gegebenen Punkt P des Raumes gehenden Flächen senkrecht. Oder auch: Die Schnittlinie zweier Tangentialebenen ist Normale zur dritten Fläche.

Satz IV. Man wähle irgend eine der konfokalen Flächen, z. B. ein Ellipsoid 10). Sie wird von allen Flächen der Scharen 11) und 12) senkrecht geschnitten, und die beiden Systeme von Durchdringungskurven schneiden sich auch ihrerseits überall auf dem Ellipsoid senkrecht. Sie sind identisch mit den Krümmungslinien der Fläche, d. h. die Tangenten in irgend einem Punkte P an die beiden durch ihn gehenden Kurven sind Haupttangenten in P. (Siehe Schluß von § 18.)

Es ist nur noch der letzte Teil des Satzes, daß nämlich die Tangenten Haupttangenten sein sollen, zu erweisen. Es werde auf dem Ellipsoid 10) irgend ein Punkt $P(x\,y\,z)$ angenommen. Durch diesen Punkt geht auch eine Fläche 11) und eine Fläche 12). Die Gleichung der Tangentialebene von 11) ist:

$$\frac{Xx}{a^2 + \mu} + \frac{Yy}{b^2 + \mu} + \frac{Zz}{c^2 + \mu} - 1 = 0.$$

Für die Richtungskosinus der Normalen, die also Tangente an die Durchdringungskurve von 10) und 12) ist, gilt daher die Proportion:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{x}{a^2 + \mu} : \frac{y}{b^2 + \mu} : \frac{z}{c^2 + \mu}.$$

Ganz ebenso folgt für die Richtung der anderen Tangente:

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = \frac{x}{a^2 + \nu} : \frac{y}{b^2 + \nu} : \frac{z}{c^2 + \nu}.$$

Wenn sie zueinander konjugiert sein sollen, so muß nach 3) und 22), § 18 die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{\cos\alpha\cos\alpha_1}{a^2 + \lambda} + \frac{\cos\beta\cos\beta_1}{b^2 + \lambda} + \frac{\cos\gamma\cos\gamma_1}{c^2 + \lambda} = 0,$$

also hier:

$$\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)} = 0.$$

In der Tat folgt aber diese Gleichung aus 16), wenn in $q(u)$ der Zähler $= 1$, also $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$ gesetzt wird.

Die beiden Tangenten sind also konjugiert. Andererseits stehen sie aufeinander senkrecht. Folglich fallen sie mit den Haupttangenten des Ellipsoides in P zusammen. (§ 18.)

Satz V. Setzt man in dem angenommenen Ellipsoid $\lambda = 0$, also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

so haben μ und ν für jeden Punkt $P(xyz)$ desselben eine sehr einfache Bedeutung. Sie sind beide negativ und ihre absoluten Werte sind identisch mit den Quadraten der großen und kleinen Halbachse derjenigen Ellipse, in welcher die zu P konjugierte Durchmesserebene das Ellipsoid schneidet.

Diese Ebene ist parallel zur Tangentialebene in P, ihre Gleichung daher:

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} = 0.$$

Soll sie mit der in 11), § 17 betrachteten Ebene übereinstimmen, so setze man:

$$m = \frac{x}{a^2}, \quad n = \frac{y}{b^2}, \quad p = \frac{z}{c^2}.$$

Die Gleichung 15), § 17 für die dort mit λ bezeichnete Größe, welche, wie damals bewiesen, mit $-a'^2$ oder $-b'^2$ übereinstimmt, wird also hier, wenn jenes λ zur Unterscheidung von dem λ in diesem Paragraphen (das hier $= 0$ sein sollte), jetzt λ' genannt wird:

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\lambda')} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\lambda')} + \frac{z^2}{c^2(c^2-\lambda')} = 0.$$

Setzt man andererseits an Stelle dieser Größe λ' die Größe μ oder ν aus 11) und 12), so wird die letzte Gleichung identisch mit einer der Gleichungen im Beweise von Satz III, wenn dort an Stelle von λ die Null gesetzt wird.

Anmerkung. Setzt man in 15) $\lambda = 0$, so nennt man μ und ν die elliptischen Koordinaten des laufenden Punktes P auf dem Ellipsoid. Die Gleichungen $\mu =$ konst. und $\nu =$ konst. geben dann die beiden Scharen von

Krümmungslinien, und 15) verwandelt sich in eine sehr häufig benutzte Parameterdarstellung des Ellipsoids. μ und ν sind hiernach die negativen Quadrate der Halbachsen derjenigen Ellipse, in welcher das Ellipsoid durch eine zur Tangentialebene parallele Durchmesserebene geschnitten wird.

Satz VI. Die konfokalen Flächen werden von jedem Punkt P ihrer Fokalkurven durch Kreiskegel projiziert. deren Achsen mit der Tangente in P an die zugehörige Fokalkurve zusammenfallen.

Dieser Satz bildete den Ausgangspunkt der Theorie der konfokalen Flächen und es bleibt nur noch nachzutragen, daß 1. für das Ellipsoid nur die Fokalhyperbel in Betracht kommt. soweit sie außerhalb verläuft, 2. für die einschaligen Hyperboloide die Kreiskegel für alle Punkte sowohl der Fokalellipse als auch der Fokalhyperbel reell sind, 3. für die zweischaligen Hyperboloide aber die Fokalhyperbel, als in den beiden Schalen befindlich. keine Kegel liefert, sondern nur die Ellipse, soweit sie außerhalb läuft.

Satz VII. Die Berührungskegel, welche man von einem beliebigen Punkte $P(xyz)$ des Raumes an sämtliche konfokale Flächen zweiter Ordnung legen kann. haben alle gleiche Hauptachsenrichtungen. welche mit den Richtungen der Schnittlinien der drei Tangentialebenen in P an die drei durch P gehenden Flächen übereinstimmen.

Dieser Satz ist eine sehr wesentliche Ausdehnung des Satzes VI auf alle Punkte des Raumes. Um ihn zu beweisen. setze man ein Ellipsoid 10) als gegeben und bestimme nach 15), § 18 die Gleichung des von einem beliebigen Punkte $P(xyz)$ ausgehenden Berührungskegels, nachdem statt a^2, b^2, c^2 geschrieben:

$$a^2 + \lambda, \quad b^2 + \lambda, \quad c^2 + \lambda.$$

Zur Vermeidung von Verwechselungen möge dann das λ aus der allgemeinen Diskussion in § 15 mit λ' bezeichnet werden. Es wird nach 1), 2) und 3), § 20:

$$A = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1;$$
$$u = \frac{-x}{a^2 + \lambda}, \quad v = \frac{-y}{b^2 + \lambda}, \quad w = \frac{-z}{c^2 + \lambda} \qquad 17)$$

und die Gleichungen 10), § 15 nehmen die Gestalt an:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{A}{a^2+\lambda} - u^2 - \lambda'\right)\mathfrak{a} - uv\,\mathfrak{b} - uw\,\mathfrak{c} &= 0 \\
-vu\,\mathfrak{a} + \left(\frac{A}{b^2+\lambda} - v^2 - \lambda'\right)\mathfrak{b} - vw\,\mathfrak{c} &= 0 \qquad 18) \\
-wu\,\mathfrak{a} - wv\,\mathfrak{b} + \left(\frac{A}{c^2+\lambda} - w^2 - \lambda'\right)\mathfrak{c} &= 0
\end{aligned}
$$

Anstatt nun sofort, wie in § 15 $\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}$ zu eliminieren und die Endgleichung 13), § 15 für λ' zu bilden, ist hier der folgende Weg einfacher und daher vorteilhafter:

Man schreibe die Gleichungen 18) so:

$$\left(\frac{A}{a^2+\lambda} - \lambda'\right)\mathfrak{a} = u\,(u\,\mathfrak{a} + v\,\mathfrak{b} + w\,\mathfrak{c}) \qquad \mathbf{18a)}$$

usw. Es folgt hieraus:

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c} = \frac{u}{\dfrac{A}{a^2+\lambda} - \lambda'} : \frac{v}{\dfrac{A}{b^2+\lambda} - \lambda'} : \frac{w}{\dfrac{A}{c^2+\lambda} - \lambda'} \qquad \mathbf{19)}$$

und nun bilde man nach Einsetzen in eine der Gleichungen 18a) und Fortlassen des Faktors u oder v oder w, sowie Einsetzen von u, v, w nach 17) die Endgleichung für λ', also die Gleichung 13) des § 15:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x^2}{(a^2+\lambda)\,[A - \lambda'(a^2+\lambda)]} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)\,[A - \lambda'(b^2+\lambda)]} \\
&\quad + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)\,[A - \lambda'(c^2+\lambda)]} - 1 = 0. \qquad \mathbf{20)}
\end{aligned}
$$

Der Form nach hat diese Gleichung eine gewisse Ähnlichkeit mit 10) oder 11) oder 12). Sie kann aber bis zur Identität gesteigert werden. Man ersetze zunächst λ' durch eine neue Unbekannte k vermittelst der Beziehung:

$$\lambda' = -\frac{A}{k}. \qquad \mathbf{21)}$$

Das erste Glied der linken Seite der Gleichung 20) wird dann:

$$\frac{x^2 k}{A\,(a^2+\lambda)(a^2+\lambda+k)} = \frac{1}{A}\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{x^2}{a^2+\lambda+k}\right).$$

Ebenso sind das zweite und dritte Glied umzuformen. Multipliziert man noch mit $-A$, so folgt:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda+k}+\frac{y^2}{b^2+\lambda+k}+\frac{z^2}{c^2+\lambda+k}$$
$$+\left(A-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}-\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)=0$$

oder endlich nach 17):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda+k}+\frac{y^2}{b^2+\lambda+k}+\frac{z^2}{c^2+\lambda+k}-1=0$$

oder auch, wenn noch gesetzt wird:

$$\lambda+k=\delta, \quad k=\delta-\lambda \qquad 22)$$

$$\frac{x^2}{a^2+\delta}+\frac{y^2}{b^2+\delta}+\frac{z^2}{c^2+\delta}-1=0 \qquad 23)$$

also vollständig übereinstimmend mit 10) oder 11) oder 12), wenn statt λ, μ oder ν gesetzt wird: δ; d. h. die drei Werte δ_1, δ_2 und δ_3 sind identisch mit denjenigen Werten von λ, μ und ν, welche den drei durch die Spitze $P(xyz)$ des Kegels gehenden Flächen zweiten Grades entsprechen.

Nun endlich nehmen nach Einführung von δ die Verhältnisse 19) die Form an:

$$\mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c}=\frac{x}{a^2+\delta}:\frac{y}{b^2+\delta}:\frac{z}{c^2+\delta}. \qquad 24)$$

Hier sind für δ der Reihe nach die Werte δ_1, δ_2 und δ_3 einzusetzen. Nach den Formeln in Satz IV stimmen also die Richtungen der Hauptachsen des Kegels in der Tat mit den Normalen an die drei Tangentialebenen überein. Q. e. d.

Satz VIII. Die Kegel, durch welche die konfokalen Flächen zweiter Ordnung von einem und demselben Punkte $P(xyz)$ im Raume projiziert werden, haben nicht allein, wie eben gezeigt, gleiche Hauptachsenrichtungen, sondern sie sind ebenfalls konfokal. Je zwei solche Kegel schneiden sich also, sofern sie verschiedenen Scharen angehören (siehe den nächsten Paragraphen), senkrecht.

Sind λ'_1, λ'_2, λ'_3 die Wurzeln der Gleichung 20) für λ', so wird die Gleichung des Berührungskegels an das Ellipsoid 10) nach der Transformation auf die Hauptachsenrichtungen (s. § 15):

$$\lambda'_1 X^2+\lambda'_2 Y^2+\lambda'_3 Z^2=0,$$

oder nach 21):

$$\frac{X^2}{k_1} + \frac{Y^2}{k_2} + \frac{Z^2}{k_3} = 0,$$

oder endlich nach 22):

$$\frac{X^2}{\delta_1 - \lambda} + \frac{Y^2}{\delta_2 - \lambda} + \frac{Z^2}{\delta_3 - \lambda} = 0. \qquad 25)$$

Nun hängen δ_1, δ_2, δ_3 nach 23) nur von der Lage der Spitze $P(xyz)$, aber nicht von dem Ellipsoid 10) ab, an welches der Berührungskegel gezogen worden ist. Also auch nicht von λ, an dessen Stelle selbstverständlich μ oder ν zu treten haben, wenn der Kegel ein Hyperboloid 11) oder 12) berührt. Nach 17) und 18), § 21 sind daher alle diese Kegel konfokal.

Bemerkungen: 1. Man stelle sich zwei konfokale Flächen, z. B. ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid etwa in Gips als Modelle vor. Sie schneiden sich, und zwar nach Satz III überall senkrecht. Aber auch die beiden Berührungskegel schneiden sich nach Satz VIII immer senkrecht, von welchem Standpunkte aus die Modelle auch betrachtet werden, d. h. die beiden Flächen schneiden sich nicht nur in Wirklichkeit überall senkrecht, sondern auch stets dem Scheine nach, wenn sie nämlich auf eine zum Auge konzentrische Kugel (in der Astronomie die sogenannte Himmelskugel) projiziert werden. 2. Aus VIII ist, wenn man P unendlich fern annimmt, noch die Folgerung zu ziehen, daß die orthogonalen Projektionen konfokaler Flächen immer konfokale Kegelschnitte sind, welche Stellung auch die Projektionsebene im Raume haben möge.

Alle diese Sätze über konfokale Flächen, denen sich noch viele andere anschließen, rechtfertigen, ganz abgesehen von den vielen Anwendungen, das hohe Interesse, welches hervorragende Geometer dieser Flächenschar entgegengebracht haben. Es mag nur noch die Bemerkung angeknüpft werden, daß das Eindringen in ihre Eigenschaften und die Einsicht in deren inneren Zusammenhang in hohem Grade durch Einführung von Ebenenkoordinaten gefördert wird, vorausgesetzt natürlich, daß man sich mit ihrer Behandlung gründlicher vertraut gemacht hat. Man beachte z. B., daß die konfokalen Flächen in Ebenen-

koordinaten als lineare Scharen erscheinen, weil ihre Gleichungen nach 11), § 18 die Form annehmen:

$$(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0, \qquad 26)$$

aus der, um nur eine neue Eigenschaft hervorzuheben, sofort ersichtlich ist, daß irgend eine gegebene Ebene im Raum von nur einer einzigen dieser Flächen berührt wird.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben zwei konfokale Ellipsoide E und E_1 mit den Halbachsen abc und $a_1 b_1 c_1$, so daß $a_1^2 - a^2 = b_1^2 - b^2 = c_1^2 - c^2 = \lambda$. Man bilde E und E_1 derart aufeinander ab, daß, wenn $P(xyz)$ und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ zwei entsprechende Punkte sind, die Gleichungen bestehen:

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z_1}{c_1}.$$

Dann gelten die beiden Sätze: α) Es ist $(MP_1)^2 - (MP)^2 = \lambda$. β) Sind P und P_1, sowie P' und P'_1 irgend zwei entsprechende Punktpaare, so ist $PP'_1 = P_1 P'$. (Korrespondenzprinzip bei konfokalen Flächen.)

2. Die Pole irgend einer Ebene in bezug auf ein System konfokaler Flächen bilden eine auf ihr senkrechte Gerade.

3. Jede Gerade l im Raume ist Tangente an zwei Flächen. Die Berührungsebenen stehen aufeinander senkrecht. Sie halbieren die Winkel, welche die beiden durch l gehenden Berührungsebenen an irgend eine andere der Flächen bilden.

---

§ 21.

Die Fokalkurven an sich. Konfokale Paraboloide. Konfokale Kegel. Sphärische Kegelschnitte.

Die Fokalkurven an sich. Will man die Fokalkurven 6), 7) und 8) des vorigen Paragraphen, oder da 6) imaginär ist, die Fokalhyperbel 7) und die Fokalellipse 8) an sich betrachten, also losgelöst von der zugehörigen Schar der konfokalen Flächen, so ist eine kleine Veränderung der Bezeichnungen geboten. Aus 7a) und 8a) geht zunächst hervor, daß die reelle Achse der Hyperbel mit der Exzentrizität der Ellipse und die große Achse der Ellipse mit der Exzentrizität der Hyperbel übereinstimmt. Die gegenseitige Lage beider Kurven kann daher folgendermaßen charakterisiert werden:

Die Ebene der Ellipse und die Ebene der Hyperbel stehen senkrecht aufeinander. Die Brennpunkte der Ellipse sind Scheitel der Hyperbel. Die Brennpunkte der Hyperbel sind Scheitel (der großen Achse) der Ellipse.

Bezeichnet man also jetzt die halbe große Achse der Ellipse mit a, und ihre halbe Exzentrizität mit e, so ist umgekehrt a die halbe Exzentrizität der Hyperbel und e ihre halbe reelle Achse. Die Gleichungen dieser Kurven werden nach 7a) und 8a) des vorigen Paragraphen:

$$\text{Hyperbel:}\quad y = 0, \quad -\frac{z^2}{a^2 - e^2} + \frac{x^2}{e^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\text{Ellipse:}\quad z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0. \tag{2}$$

(Es ist also auch noch die kleine Achse der Ellipse gleich der imaginären Achse der Hyperbel.) Da es sich um die Grenzkurven der konfokalen Flächenscharen handelt, lassen sich manche der Sätze I — VIII des vorigen Paragraphen sofort übertragen. Satz VI z. B. ergibt:

Die Ellipse wird von jedem Punkte der Hyperbel und umgekehrt die Hyperbel von jedem Punkte der Ellipse durch einen Kreiskegel projiziert, dessen Achse die Hyperbel bzw. die Ellipse berührt.

Also ist der geometrische Ort aller Spitzen von Kreiskegeln über einer gegebenen Ellipse die zugehörige Fokalhyperbel und umgekehrt.

Satz VIII lautet hier:

Die Ellipse und die Hyperbel werden von irgend einem Punkte im Raume durch konfokale Kegel projiziert. Sie scheinen sich also, von wo aus man sie auch ansehen mag, stets senkrecht zu schneiden.

Es sind aber noch viel merkwürdigere Beziehungen zwischen beiden Kurven gefunden worden, die man als überaus interessante Erweiterungen der Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte betrachten kann. Sie beruhen auf der Möglichkeit, die Formel:

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2 + z_1^2} \tag{3}$$

für die Entfernung zwischen irgend einem Punkte $P(x, y, 0)$ der Ellipse und irgend einem Punkte $P_1(x_1, 0, z_1)$ der Hyperbel nach 1) und 2) überraschend zu vereinfachen. Denn setzt man für P und P_1 die Gleichungen 1) und 2) an:

$$\frac{x_1^2}{e^2} - \frac{z_1^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0,$$

so ergibt sich:

$$y^2 + z_1^2 = -(a^2 - e^2)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{e^2}\right) = -(x^2 + x_1^2) + \frac{x^2 e^2}{a^2} + \frac{x_1^2 a^2}{e^2}.$$

Daher:

$$(x_1 - x)^2 + y^2 + z_1^2 = -2xx_1 + \frac{e^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 x_1^2}{e^2} = \left(\frac{a}{e}x_1 - \frac{e}{a}x\right)^2.$$

Die Wurzel geht nun auf und man erhält äußerst einfach:

$$r = \pm\left(\frac{a}{e}x_1 - \frac{e}{a}x\right). \qquad 4)$$

Um zu entscheiden, welches Vorzeichen zu nehmen ist, wenn r absolut genommen werden soll, beachte man, daß der Minimalwert von $x_1 = e$, von $\frac{a}{e}x_1$ also $= a$, aber der Maximalwert von $x = a$, von $\frac{e}{a}x$ also $= e$ ist. Der absolute Wert des ersten Gliedes $\frac{a}{e}x_1$ ist also unter allen Umständen der größere. Also:

Die Entfernung r zwischen einem Punkte $P(x, y, 0)$ der Ellipse und einem Punkte $P_1(x_1, 0, z_1)$ der Hyperbel wird durch die einfache Formel 4) bestimmt. Das positive Zeichen ist zu nehmen, wenn x_1 positiv, das negative, wenn x_1 negativ ist.

Läßt man z. B. P_1 mit dem einen oder dem anderen Scheitel der Hyperbel, also mit einem Brennpunkte der Ellipse zusammenfallen, so ist $x_1 = \pm e$, und 4) gibt daher für die beiden Brennstrahlen r_1 und r_2 die bekannten Formeln (I. § 14):

$$r_1 = a - \frac{e}{a}x, \quad r_2 = a + \frac{e}{a}x.$$

Nun aber wähle man auf der Hyperbel irgend zwei Punkte $Q(x_1, 0, z_1)$ und $R(x_2, 0, z_2)$, zunächst auf verschiedenen Ästen,

x_1 positiv, x_2 negativ, und verbinde sie mit einem beliebigen Punkte $P(x, y, 0)$ der Ellipse. Die Längen r_1 und r_2 dieser Linien werden dann nach 4):

$$r_1 = \frac{a}{e} x_1 - \frac{e}{a} x, \quad r_2 = -\frac{a}{e} x_2 + \frac{e}{a} x,$$

also:

$$r_1 + r_2 = \frac{a}{e}(x_1 - x_2), \tag{5}$$

d. h. $r_1 + r_2$ ist unabhängig von der Lage des Punktes P auf der Ellipse. Liegen aber Q und R auf demselben Hyperbelast, so muß die Summe $r_1 + r_2$ durch die Differenz $\pm(r_1 - r_2)$ ersetzt werden, ebenso wie in dem umgekehrten Fall, daß man zwei feste Punkte der Ellipse mit einem beliebigen Punkte der Hyperbel verbindet. Also (Fig. 34):

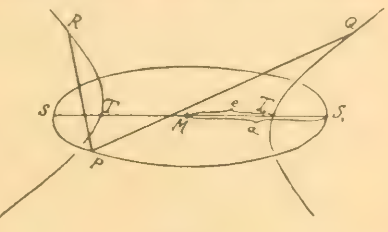


Fig. 34.

Die Summe oder Differenz der Verbindungslinien eines beliebigen Punktes P der Ellipse mit zwei festen Punkten Q und R der Hyperbel ist von der Lage des Punktes P ganz unabhängig. Die Summe ist zu nehmen, wenn Q und R auf verschiedenen Hyperbelästen liegen, sonst die Differenz. Ebenso ist die Differenz der Entfernungen eines beliebigen Punktes der Hyperbel von zwei festen Punkten der Ellipse ganz unabhängig von der Lage des Punktes auf der Hyperbel.

Man ist daher wohl berechtigt, in diesem Sinne der Ellipse nicht nur zwei, sondern unendlich viele Brennpunkte zuzusprechen, welche zusammen die Fokalhyperbel bilden, während umgekehrt die Fokalhyperbel ihrerseits auch unzählig viele Brennpunkte besitzt, die alle auf der gegebenen Ellipse als der zugehörigen Fokalellipse liegen.

Konfokale Paraboloide. Selbstverständlich können die Fokaleigenschaften von dem Ellipsoid und den Hyperboloiden auf die anderen Flächen zweiten Grades übertragen werden. Um indessen Wiederholungen zu vermeiden, ist es ratsam, unmittelbar von den Formeln 10) bzw. 11) oder 12) auszugehen

und einen Grenzübergang zu machen. Will man zu den Paraboloiden gelangen, so bezieht man das Ellipsoid zunächst auf einen Scheitel, setzt also $z - c$ an Stelle von z. Die Gleichung 10) wird dann:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2 - 2zc + c^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0.$$

oder, wenn das lineare Glied entwickelt wird:

$$z = \frac{x^2 (c^2 + \lambda)}{2c(a^2 + \lambda)} + \frac{y^2 (c^2 + \lambda)}{2c(b^2 + \lambda)} + \frac{z^2}{2c} - \frac{\lambda}{2c}.$$

Nun setze man hier $c\lambda$ an Stelle von λ. Es folgt:

$$z = \frac{x^2\left(1 + \frac{\lambda}{c}\right)}{2\left(\frac{a^2}{c} + \lambda\right)} + \frac{y^2\left(1 + \frac{\lambda}{c}\right)}{2\left(\frac{b^2}{c} + \lambda\right)} + \frac{z^2}{2c} - \frac{\lambda}{2}.$$

Für das Paraboloid sind a, b, c unendlich, aber so, daß die Quotienten:

$$p = \frac{a^2}{c}, \quad q = \frac{b^2}{c}$$

endlich bleiben. Die vorige Gleichung nimmt dann die Gestalt an:

$$z = \frac{x^2}{2(p + \lambda)} + \frac{y^2}{2(q + \lambda)} - \frac{\lambda}{2}. \tag{6}$$

Sie gibt, wenn λ verändert wird, alle zu einem gegebenen Paraboloid:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \tag{7}$$

konfokalen Paraboloide.

Es sei 7) ein elliptisches Paraboloid, p und q beide positiv und $p > q$. Die konfokalen Flächen 6) bleiben elliptische Paraboloide, solange $p + \lambda$ und $q + \lambda$ positiv sind. Der eine Grenzwert $\lambda = +\infty$ gibt die unendlich ferne Ebene, der andere $\lambda = -q$ gibt die Innenfläche der einen Fokalparabel:

$$z = \frac{x^2}{2(p - q)} + \frac{q}{2}, \quad y = 0. \tag{8}$$

Variiert aber λ zwischen $-q$ und $-p$, so haben $p + \lambda$ und $q + \lambda$ entgegengesetzte Vorzeichen und die Fläche wird ein

hyperbolisches Paraboloid. Dem ersten Grenzwert $\lambda = -q$ entspricht die Außenfläche der Parabel 8), dem zweiten $\lambda = -p$ dagegen die Außenfläche der zweiten Fokalparabel:

$$z = -\frac{y^2}{2(p-q)} + \frac{p}{2}, \quad x = 0. \tag{9}$$

Wird endlich $\lambda < -p$, so wird $p + \lambda$ und $q + \lambda$ negativ. Die Flächen werden wieder elliptische Paraboloide, die sich aber jetzt um die $-z$-Achse krümmen. Der erste Grenzfall $\lambda = -p$ gibt im Anschluß an das letzte hyperbolische Paraboloid das erste, zur Innenfläche der Parabel 9) abgeplattete elliptische Paraboloid, der letzte $\lambda = -\infty$ dagegen gibt wieder die unendlich ferne Ebene.

Die beiden Fokalparabeln 8) und 9) haben die Eigenschaft, daß ihre Ebenen senkrecht aufeinander stehen, und daß der Brennpunkt der einen mit dem Scheitel der anderen zusammenfällt, wie nach der Lage der Fokalellipse und Fokalhyperbel im allgemeinen Falle nicht anders zu erwarten war.

Nimmt man auf der Parabel 8) irgend einen Punkt $P(x, 0, z)$ und auf 9) $P_1(0, y_1, z_1)$ an, so wird für ihren Abstand r die Formel gefunden:

$$r = z - z_1 + p - q, \tag{10}$$

welche analog zur Formel 4) ist. Aus ihr ist zu entnehmen, daß auch hier die Differenz der Entfernungen zweier festen Punkte der einen Parabel von einem beliebigen Punkte der anderen von der Lage des letzteren ganz unabhängig ist.

Konfokale Umdrehungsflächen. Wie sich gezeigt hat, zerfallen auch bei Paraboloiden die konfokalen Flächen in drei durch die Fokalkurven voneinander geschiedene Systeme. In anderen Fällen aber erfordert der Grenzübergang besondere Umsicht, wenn nicht eins der drei Systeme verloren gehen soll. Ein solcher Fall liegt z. B. vor, wenn das anfänglich gegebene Ellipsoid ein abgeplattetes Rotationsellipsoid ist, so daß etwa $a = b$ und $c < a$. Dann bleibt die Schar 10), § 20 der Ellipsoide bestehen, nur daß sie alle abgeplattete Umdrehungsflächen werden, von der unendlich großen Kugel beginnend bis zur Innenfläche der Fokalellipse 8), § 20, die

hier zum Fokalkreis wird. Auch die Flächenschar 11), § 20 der einschaligen Hyperboloide bleibt bestehen, sie wird auch von Umdrehungsflächen gebildet, deren letzte in eine gerade Linie, die z-Achse ausartet, die hier die zum Fokalkreis zugehörige Fokalhyperbel vertritt. Aber die Flächenschar 12), § 20 geht scheinbar verloren, da hier die Ungleichungen:

$$-b^2 > \nu > -a^2 \tag{11}$$

in die Gleichung $-b^2 = \nu = -a^2$ übergehen und dieser Wert von ν keine eigentliche Fläche mehr, sondern nur die z-Achse zu geben scheint.

Man setze daher nicht unmittelbar $b = a$, sondern $b^2 = a^2 - \varepsilon$ und lasse nun ε sich der 0 unbegrenzt nähern. Dann kann man, solange nicht der Parameter λ bzw. μ oder ν sich dem Werte $-a^2$ unendlich genähert hat, also für 10) und 11), § 20 an Stelle von ε unbedenklich die Null setzen, d. h. $a = b$ annehmen. Anders aber wird die Sachlage für 12), § 20, denn die Ungleichung 11) sagt, daß ν zwischen $-a^2$ und $-(a^2 - \varepsilon)$ liegt. Man kann daher $\nu = -(a^2 - \delta)$ setzen, wo δ jeden Wert zwischen 0 und ε annehmen darf. Die Gleichung 12), § 20 wird dann:

$$\frac{x^2}{\delta} - \frac{y^2}{\varepsilon - \delta} - \frac{z^2}{a^2 - c^2 - \delta} - 1 = 0.$$

Nun multipliziere man mit $\delta(\varepsilon - \delta)$ und behalte nur die Glieder bei, welche vom ersten Grade unendlich klein sind, so folgt:

$$x^2(\varepsilon - \delta) - y^2\delta = 0,$$

d. h.

$$y = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon - \delta}{\delta}} \cdot x = \pm kx. \tag{12}$$

$k = \sqrt{\frac{\varepsilon - \delta}{\delta}}$ kann, wenn δ zwischen 0 und ε variiert, jeden Wert annehmen. Folglich besteht für diesen Fall, wie immer, wenn die anfänglich gegebene Fläche eine Rotationsfläche ist, die eine scheinbar verloren gegangene Schar aus allen durch die Rotationsachse gehenden Ebenen. Und in der Tat schneiden diese die beiden anderen Flächenscharen offenbar senkrecht, wie es nach Satz III, § 20 sein muß.

Konfokale Kegel. Um nun noch auf die Schar von Flächen zu kommen, die zu einem gegebenen Kegel:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0 \tag{13}$$

(es sei $A > B > C$, A und B positiv, C negativ)

konfokal sind, schreibe man zunächst allgemeiner:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = k, \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{Ak} + \frac{y^2}{Bk} + \frac{z^2}{Ck} - 1 = 0. \tag{14}$$

Die zu 14) konfokalen Flächen sind daher:

$$\frac{x^2}{Ak + \lambda} + \frac{y^2}{Ak + \lambda} + \frac{z^2}{Ck + \lambda} - 1 = 0, \tag{15}$$

und nun ist $k = 0$ oder vielmehr $\lim k = 0$ zu setzen, wenn man zu den mit dem Kegel 13) konfokalen Flächen gelangen will. Wenn λ irgend einen (positiven), aber nicht unendlich kleinen Wert hat, so ist in 15) k unmittelbar $= 0$ zu setzen, und wenn dann $r = \sqrt{\lambda}$ eingeführt wird, so entstehen die **konzentrischen Kugeln:**

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \tag{16}$$

als die eine Schar der zu einem gegebenen Kegel 13) konfokalen Flächen. Sie entsprechen der Ellipsoidenschar 10), § 20.

Wird aber λ selbst unendlich klein wie k, so ersetze man in 15) λ durch $k\lambda$, multipliziere mit k und setze dann $k = 0$. Es folgt:

$$\frac{x^2}{A + \lambda} + \frac{y^2}{B + \lambda} + \frac{z^2}{C + \lambda} = 0,$$

also Kegel. Damit dieselben reell sind, dürfen die drei Koeffizienten $A + \lambda$, $B + \lambda$, $C + \lambda$ nicht alle drei dasselbe Zeichen haben, es muß also λ (da $A > B > C$) größer sein als $(-A)$ und kleiner als $(-C)$. Dieses Intervall zerfällt aber naturgemäß in zwei, so daß folgende zwei Scharen von Kegeln zu unterscheiden sind:

$$\frac{x^2}{A + \mu} + \frac{y^2}{B + \mu} + \frac{z^2}{C + \mu} = 0; \quad -B < \mu < -C \tag{17}$$

$$\frac{x^2}{A + \nu} + \frac{y^2}{B + \nu} + \frac{z^2}{C + \nu} = 0; \quad -A < \nu < -B. \tag{18}$$

In 17) liegt die z-Achse, in 18) die x-Achse innerhalb des Kegels. Für den Grenzwert $\mu = -C$, geht der Kegel 17) in die xy-Ebene über, denn seine Gleichung wird dann (nach Multiplikation mit $C+\mu$): $z^2 = 0$. Ist aber μ innerhalb der angegebenen Grenzen beliebig, so liegen in der xz- und in der yz-Ebene je zwei zur z-Achse gleich geneigte Kanten. Bezeichnet man diese Neigungen mit α und β, so folgt, nachdem in 17) erst $y = 0$, dann $x = 0$ gesetzt worden:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{x^2}{z^2} = \frac{A+\mu}{-(C+\mu)}, \quad \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{y^2}{z^2} = \frac{B+\mu}{-(C+\mu)}. \qquad 19)$$

Es ist also $\alpha > \beta$. Aber für $\mu = -C$ ist $\alpha = \beta = 90^0$. Je mehr sich indessen μ dem anderen Grenzwert $\mu = -B$ nähert, desto kleiner werden α und β, und wenn dieser Grenzwert erreicht ist, so wird $\beta = 0$ und α hat seinen Minimalwert ε erreicht, der nach 19) durch die Formel:

$$\operatorname{tg}^2 \varepsilon = \frac{A-B}{B-C} \qquad 20)$$

zu bestimmen ist. Der Kegel ist in die beiden doppelt zu zählenden Scheitelwinkelräume zwischen den beiden durch die Spitze gehenden Richtungen in der xz-Ebene abgeplattet, welche mit der z-Achse die Winkel $\pm\varepsilon$ bilden. Diese heißen die Fokalstrahlen der Kegel 17) und 18) und entsprechen der Fokalhyperbel im allgemeinen Falle. (Die Fokalellipse ist natürlich zu einem Punkte, der Spitze des Kegels zusammengeschrumpft.)

An den letzten aus dem genannten Winkelraum bestehenden abgeplatteten Kegel der Schar 17) schließt sich der erste, aus den durch die x-Achse halbierten Nebenwinkelräumen gebildete Kegel der Schar 18) an. Wenn ν von dem Grenzwert $-B$ nach dem anderen Grenzwert $-A$ abrückt, so öffnet sich der Kegel allmählich um die x-Achse und für $\nu = -A$ nimmt er die ganze yz-Ebene ein.

Sphärische Kegelschnitte. Nach den Sätzen über konfokale Flächen schneiden sich auch die Kegel 17) mit den Kegeln 18) senkrecht, wie auch beide die konzentrischen Kugeln 16) senkrecht durchdringen. Man nennt die letzteren Durchdringungskurven sphärische Kegelschnitte. Ein sphä-

rischer Kegelschnitt ist also der Schnitt eines elliptischen Kegels mit einer um die Spitze als Mittelpunkt beschriebenen Kugel (Fig. 35). Er zerfällt in zwei sich gegenüberliegende Hälften, die aber erst zusammen den ganzen Kegelschnitt bilden. Die vier Schnittpunkte der Fokalstrahlen mit der Kugel heißen seine Brennpunkte. Offenbar kann jeder der sechs Schnittpunkte der drei Hauptachsen als Mittelpunkt der Kurve angesehen werden, also: A, A_1, B, B_1, C, C_1.

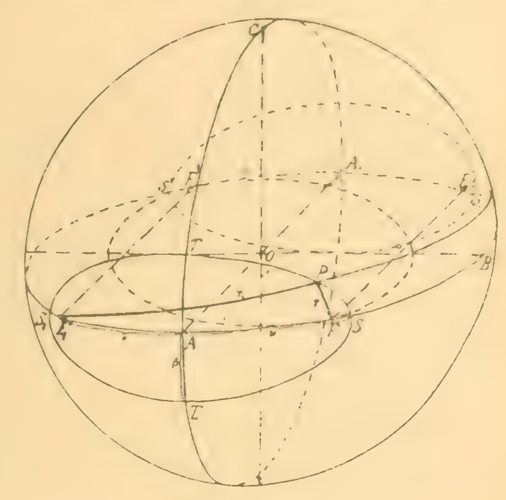


Fig. 35.

Setzt man $r = 1$, so werden α, β und ε durch die Bögen AS, AT und AF gemessen. Die Bögen $SS_1 = 2\alpha$ und $TT_1 = 2\beta$ entsprechen daher ganz den Hauptachsen der ebenen Kegelschnitte. Aber auch $FF_1 = 2\varepsilon$, die sogenannte Exzentrizität, verdient, wie jetzt bewiesen werden soll, diesen Namen mit vollem Recht.

Zunächst folgt aus 20) und 19):

$$\operatorname{tg}^2\varepsilon = \frac{A+\mu-(B+\mu)}{(B+\mu)-(C+\mu)} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta,$$

also:

$$\cos^2\varepsilon = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varepsilon} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\beta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta},$$

mithin:

$$\cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}; \quad \cos\alpha = \cos\beta\cos\varepsilon. \qquad \textbf{21)}$$

Also hat nach der ersten Grundformel der sphärischen Trigonometrie die Hypotenuse eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks die Länge α, wenn die beiden Katheten $= \beta$ und

$= \varepsilon$ sind. Dieses sphärische Dreieck ist das Dreieck AFT, welches ganz dem aus a, b und e gebildeten ebenen rechtwinkligen Dreieck entspricht (I, § 13).

Die vollkommene Analogie der sphärischen mit den ebenen Kegelschnitten geht aber aus der Lösung folgender Aufgabe hervor:

Aufgabe. Gegeben auf der Kugel zwei feste Punkte F und F_1. Gesucht wird der geometrische Ort aller Punkte P, für welche die Summe der Bögen $PF = r$ und $PF_1 = r_1$ konstant ist.

Lösung: Man setze $FF_1 = 2\varepsilon$, die Summe $r + r_1 = 2\alpha$, nehme die Verbindungslinie des Mittelpunktes O der Kugel mit der Mitte A des Bogens FF_1 zur z-Achse, die Ebene durch F, F_1, O zur zx-Ebene, dann sind die Richtungskosinus der Richtungen OF und OF_1

$$\sin\varepsilon,\ 0,\ \cos\varepsilon \quad \text{und} \quad -\sin\varepsilon,\ 0,\ \cos\varepsilon.$$

Da der Radius der Kugel $= 1$, so sind x, y und z unmittelbar auch die Richtungskosinus der Richtung OP.

Nach 13), § 1 folgt daher:

$$\cos r = x\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon, \quad \cos r_1 = -x\sin\varepsilon + z\cos\varepsilon.$$

Hieraus kann man r und r_1 entnehmen und in die Bedingung: $r + r_1 = 2\alpha$ einsetzen. Vorteilhafter ist es aber, erst durch Addition oder Subtraktion umzuformen:

$$\cos r + \cos r_1 = 2z\cos\varepsilon, \quad \cos r - \cos r_1 = 2x\sin\varepsilon,$$

oder:

$$\cos\frac{r+r_1}{2}\cos\frac{r_1-r}{2} = z\cos\varepsilon, \quad \sin\frac{r+r_1}{2}\sin\frac{r_1-r}{2} = x\sin\varepsilon,$$

also, da $r + r_1 = 2\alpha$ sein soll:

$$\cos\frac{r_1-r}{2} = z\frac{\cos\varepsilon}{\cos\alpha}, \quad \sin\frac{r_1-r}{2} = x\frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha}.$$

folglich:

$$1 = x^2\frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\alpha} + z^2\frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\alpha}.$$

Diese Gleichung ist, um auf den projizierenden Kegel zu kommen, homogen zu machen. Man setze daher $1 = x^2 + y^2 + z^2$. Es wird:

$$x^2\left(1 - \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\alpha}\right) + y^2 + z^2\left(1 - \frac{\cos^2\varepsilon}{\cos^2\alpha}\right) = 0.$$

oder nach Division mit $\sin^2\alpha - \sin^2\varepsilon = \cos^2\varepsilon - \cos^2\alpha$ und Multiplikation mit $\cos^2\alpha$:

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{y^2\cos^2\alpha}{\cos^2\varepsilon - \cos^2\alpha} - z^2 = 0,$$

oder nach Einführung eines neuen Bogens β nach 21):

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2\beta} - z^2 = 0.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist also identisch mit einem sphärischen Kegelschnitt, dessen Halbachsen α und β aus der gegebenen Kegelgleichung 17) nach 19) bestimmt werden müssen*).

Anmerkung. Die Bedingung $r + r_1 = 2\alpha$ gibt nur die eine Hälfte des Kegelschnittes. Für die andere Hälfte muß man entweder 2α durch $2\pi - 2\alpha$ ersetzen, (wenn nämlich F und F_1 bleiben sollen), oder F und F_1 durch die gegenüberliegenden Brennpunkte F' und F'_1 ersetzen, (wenn 2α bleiben soll). Ersetzt man aber nur einen Brennpunkt F_1 durch F'_1, also r_1 durch $r'_1 = \pi - r_1$, so folgt:

$$r + r_1 = 2\alpha, \quad r_1 + r'_1 = \pi,$$

also:

$$r'_1 - r = \pi - 2\alpha,$$

d. h. die Differenz der Entfernungen wird konstant. Es gibt auf der Kugel keinen Unterschied zwischen Ellipse und Hyperbel.

Daß eingehendes Studium dieser viel und gründlich durchforschten sphärischen Kegelschnitte zu einer Theorie dieser ausgezeichneten Kurven führen muß, welche zur Theorie der ebenen Kugelschnitte etwa in demselben Verhältnis steht, wie die sphärische zur ebenen Trigonometrie, versteht sich nach dem Vorangegangenen wohl von selbst. Sie soll aber hier nicht weiter verfolgt, die Theorie der konfokalen Flächen vielmehr mit der einleuchtenden Bemerkung geschlossen werden, daß die letzte Ausartung dieser Flächen, nämlich die konfokalen Zylinder, sofort zur Theorie der ebenen konfokalen Kegelschnitte zurück-

---

*) Selbstverständlich wäre hier, da die Definition des sphärischen Kegelschnittes und seiner Brennpunkte rein analytisch vorangegangen war, der umgekehrte Weg der Ableitung dieser fundamentalen Eigenschaft aus 16), 17), 19) und 20) der natürlichere gewesen. Er ist aber ungleich mühsamer. Hinterher ist er freilich leichter zu finden.

führt, da hier die Spitze in der Unendlichkeit liegt, die Kugeln sich also auf senkrecht schneidende Ebenen reduzieren.

Übungsaufgaben.

1. Man zeige, daß die Formel 4) einen besonderen Fall des Korrespondenzprinzipes (siehe Übungsaufgabe 1, § 20) darstellt.

2. Auf Fokalellipse 1) sei $P_1(x_1, y_1, 0)$, auf Fokalhyperbel 2) sei $P_2(x_2, 0, z_2)$ angenommen. $Q_1(\xi_1, 0, 0)$, $Q_2(\xi_2, 0, 0)$ seien die nach der vorigen Aufgabe korrespondierenden Punkte der x-Achse, also $\xi_1 = x_1 \frac{e}{a}$, $\xi_2 = x_2 \frac{a}{e}$, so daß $P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = \pm(\xi_2 - \xi_1)$. Man kann also die x-Achse so durch Kongruenz auf der Geraden $P_1 P_2$ abbilden, daß Q_1 mit P_1, Q_2 mit P_2 zusammenfallen. Nun werde auf der x-Achse irgend ein Punkt $Q(k, 0, 0)$ als fest angenommen. Er möge bei der Abbildung auf den Punkt $P(xyz)$ fallen. 1. Welche Kurve beschreibt P, wenn Q_1 (also auch P_1) fest bleibt, Q_2 variiert, oder wenn Q_2 festbleibt, Q_1 variiert. 2. Wie lautet die Gleichung der Fläche (Dupinsche Zykloide), welche P beschreibt, wenn Q_1 und Q_2 beide variieren?

---

§ 22.

Erzeugung der Raumkurven dritter Ordnung und der Flächen zweiter Ordnung durch lineare Gebilde. Lineare Flächenbüschel und Flächenscharen. Geometrische Verwandtschaften.

Die projektive Seite der analytischen Geometrie, welche für die Ebene im ersten Teil dieses Lehrbuches mit der ihr gebührenden Gründlichkeit entwickelt worden ist, kann im Raum eine gleiche Behandlung erfahren. Sie ist auch, wo sich hierzu Gelegenheit geboten hat, stets berücksichtigt worden, wenn auch erst in zweiter Linie, um das Buch nicht zu sehr anschwellen zu lassen. Auch bergen die projektiven Begriffe und Grundvorstellungen, wenn sie erst an ebenen Gebilden gewonnen und gefestigt sind, in sich die leichte Übertragungsfähigkeit auf den Raum. Außerdem finden die projektiven Methoden ihre größte Anwendung doch immer in der zeichnerischen ebenen Darstellung. In diesem Schlußkapitel sollen daher nur flüchtige Streiflichter auf einige der wichtigsten die Projektivität angehenden Fragen geworfen werden.

Wo liegt im Raum die Analogie für die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlenbüschel

und Punktreihen mit den sich anschließenden einfachen linearen Konstruktionen? Können die Flächen zweiten Grades auf ähnliche Art erzeugt werden?

Für die geradlinigen Flächen (das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid) ist diese Frage in gewissem Sinne bereits gelöst, da sie nach § 19 durch projektive Ebenenbüschel entstehen, wenn man entsprechende Ebenen zum Schnitt bringt, oder durch projektive Punktreihen, wenn man entsprechende Punkte verbindet. Als Grenzfälle sind dabei zu betrachten einerseits die Kegel (wenn die Achsen der beiden Ebenenbüschel sich schneiden) und andererseits die ebenen Kurven (wenn die beiden Punktreihen in einer Ebene liegen), in welchem Falle sich die Fläche auf die Gesamtheit der Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung reduziert.

Dabei werden die Flächen zweiter Ordnung wie eindimensionale Gebilde behandelt, als kontinuierliche Folgen von geraden Linien, welche eine wie die andere durch einerlei Konstruktion gefunden werden. Auch paßt diese Erzeugungsart nicht für die Flächen zweiter Ordnung, auf welchen keine oder vielmehr nur imaginäre gerade Linien vorhanden sind. Eine wirklich allgemeine projektive Konstruktion müßte aber für alle Flächen zweiter Ordnung Gültigkeit haben und so beschaffen sein, daß sie Punkt für Punkt ergibt.

Wie soll man eine solche finden? Der Versuch liegt nahe, statt zweier projektiver Ebenenbüschel zwei kollineare Bündel zu nehmen, indem man sich etwa vorstellt, daß sie zu Anfang auf ein und dasselbe ebene System perspektivisch bezogen wurden und dann durch Drehung und Verschiebung in die allgemeine kollineare Lage gebracht worden sind. Aber man sieht sofort, daß das Ergebnis nimmermehr eine Fläche zweiter Ordnung sein kann, da entsprechende Strahlen im allgemeinen windschief zueinander sein werden; wie auch umgekehrt eine Fläche zweiter Ordnung von zwei auf ihr liegenden Punkten nicht durch projektive, sondern anders miteinander verwandte Strahlenbündel projiziert wird, da z. B. ein ebener durch P gehender Schnitt von P aus durch ein ebenes Strahlenbüschel, von P_1 aus aber durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert wird.

Die Kurve dritter Ordnung. Immerhin liegt der Gedanke, zwei Bündel kollinear aufeinander zu beziehen und nach

ihrem Ergebnis zu fragen, nahe genug, daß er, einmal angeregt, wohl verdient, etwas ausgesponnen zu werden. Es seien also $S(abc)$ und $S_1(a_1 b_1 c_1)$ die Zentren der beiden Bündel, l und l_1 zwei entsprechende Strahlen mit den Richtungswinkeln $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ und $P(xyz)$ ein beliebiger Punkt auf l, $P_1(x_1 y_1 z_1)$ ein solcher auf l_1. Dann ist zunächst:

$$\begin{aligned} \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= x - a : y - b : z - c \\ \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 &= x_1 - a_1 : y_1 - b_1 : z_1 - c_1 . \end{aligned} \qquad 1)$$

Die beiden Bündel werden auf die allgemeinste Art kollinear aufeinander bezogen, wenn die Richtungskosinus von l_1 zu linearen Ausdrücken der Richtungskosinus von l proportional gesetzt werden (vgl. I, § 26). Nach 1) wird also der analytische Ausdruck dieser Verwandtschaft durch folgende drei Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 - a_1 &= \lambda[A_1(x-a) + B_1(y-b) + C_1(z-c)] \\ y_1 - b_1 &= \lambda[A_2(x-a) + B_2(y-b) + C_2(z-c)] \\ z_1 - c_1 &= \lambda[A_3(x-a) + B_3(y-b) + C_3(z-c)] \end{aligned} \qquad 2)$$

Hier bedeuten $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3$ neun irgendwie gegebene Koeffizienten (deren Determinante nicht $= 0$ sein darf) und λ einen vorläufig ganz willkürlichen Proportionalitätsfaktor. Die Strahlen l und l_1 werden, wie bereits erwähnt, im allgemeinen windschief sein. Doch wird es auch solche geben, welche sich schneiden. Für diese kann man annehmen, daß P und P_1 zusammenfallen, d. h. daß:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z. \qquad 3)$$

Dies ist in 2) einzusetzen. Da durch Elimination von λ im allgemeinen zwei voneinander unabhängige Gleichungen entstehen, so ist der geometrische Ort der Schnittpunkte derjenigen sich entsprechenden Strahlen l und l_1, welche sich überhaupt treffen, eine Kurve und keine Fläche. Behält man aber λ bei und berechnet aus 2), nachdem $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ gesetzt worden, x, y und z, so entstehen Ausdrücke von der Form:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p_1 + q_1\lambda + r_1\lambda^2 + s_1\lambda^3}{p_4 + q_4\lambda + r_4\lambda^2 + s_4\lambda^3} \\ y &= \frac{p_2 + q_2\lambda + r_2\lambda^2 + s_2\lambda^3}{p_4 + q_4\lambda + r_4\lambda^2 + s_4\lambda^3} \\ z &= \frac{p_3 + q_3\lambda + r_3\lambda^2 + s_3\lambda^3}{p_4 + q_4\lambda + r_4\lambda^2 + s_4\lambda^3} \end{aligned} \qquad 4)$$

wo die 16 Koeffizienten konstante, aus den $A_1 B_1 C_1$ usw. zusammengesetzte Werte haben.

Diese Parameterdarstellung 4) beweist, daß die Kurve von der dritten Ordnung ist. Denn die Bestimmung ihrer Schnittpunkte mit irgend einer Ebene:

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

führt nach Einsetzen von 4) zu einer Gleichung dritten Grades. Sie geht durch $S(abc)$ und durch $S_1(a_1 b_1 c_1)$ hindurch, da diese beiden Punkte durch die Werte $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ bestimmt werden.

Um aber festzustellen, welche Strahlen des Bündels S von den entsprechenden Strahlen l_1 des Bündels S_1 geschnitten werden, setze man zur Bequemlichkeit $a = b = c = 0$, multipliziere dann die Gleichungen 2) der Reihe nach (nachdem $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ gesetzt worden) mit $c_1 y - b_1 z$, $a_1 z - c_1 x$, $b_1 x - a_1 y$ und addiere. Man erhält dann auf der linken Seite identisch 0 und rechts (nach Fortlassung des Faktors λ) eine homogene Funktion zweiter Ordnung von xyz.

Es liegen daher alle Strahlen l, welche von den entsprechenden Strahlen l_1 geschnitten werden, auf einem Kegel zweiter Ordnung. Ein gleiches gilt selbstverständlich auch von den Strahlen l_1. Diese beiden Kegel haben zwar verschiedene Spitzen S und S_1, aber die Verbindungslinie SS_1 ist eine gemeinsame Kante, da sie sowohl als ein Strahl l als auch als ein Strahl l_1 angesehen werden kann und in beiden Fällen der zugehörige Strahl eo ipso schneiden muß, da eben SS_1 durch beide Zentren hindurchgeht.

Die beiden Kegel schneiden sich somit in einer Geraden SS_1 und außerdem in der Raumkurve dritter Ordnung 4). Letztere wird aber nicht bloß von S und S_1 aus, sondern wie sich aus den Gleichungen 4) ohne Schwierigkeit ableiten läßt, von jedem ihrer Punkte durch Kegel zweiter Ordnung projiziert, wobei sich herausstellt, daß S und S_1 gar keine besonderen Punkte der Kurve sind, sondern durch irgend zwei andere auf ihr liegende Punkte ersetzt werden können.

Die so aufgefundenen Raumkurven dritter Ordnung zeigen bei gründlicherem Studium eine überraschende Fülle hervorragender projektiver (dagegen weniger metrische) Eigenschaften. Sie entstehen, nebenbei bemerkt, auch durch drei projektive

Ebenenbüschel, als geometrischer Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Ebenen, wie ja auch aus den Gleichungen 2) zu schließen ist, wenn man diese bei Variieren von λ (nachdem $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ gesetzt worden) als Darstellungen von Ebenenbüscheln betrachtet (§ 8).

Wenn man von den geraden Linien und den Kegelschnitten als ebenen Kurven absieht, so sind die Raumkurven dritter Ordnung*) sowohl vom analytischen als auch vom projektivisch geometrischen Standpunkt aus die einfachsten wirklich räumlichen Kurven überhaupt. Auch zeigen sie sich bei tieferer Untersuchung so innig mit den Kegelschnitten verwandt, daß man sie schon wiederholt als räumliche Kegelschnitte bezeichnet hat.

Projektive Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung. Kollineare Bündel führen also zu keiner Konstruktion der Flächen zweiter Ordnung, und man wird sich wohl nach einer Verwandtschaft umsehen müssen von der Beschaffenheit, daß entsprechende Elemente bei ihrer Zuordnung nicht nur im besonderen, sondern immer Schnittpunkte bestimmen.

Zwei reziprok aufeinander bezogene Bündel haben diese Eigenschaft, da hier jeder Geraden $l(\alpha\beta\gamma)$ des einen Bündels S eine Ebene E_1 des anderen Bündels S_1 entspricht. Es sei $l_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ irgend eine in E_1 liegende Gerade des Bündels S_1, so sind l und l_1 zugeordnet, aber so, daß ein l unzählig viele l_1, die zusammen ein Strahlenbüschel bilden, bestimmt und umgekehrt. Diese Zuordnung wird durch eine beiderseits

*) Eine Raumkurve dritter Ordnung und eine ebene Kurve dritter Ordnung sind trotz der Übereinstimmung der Ordnung ganz verschieden, sowohl in analytischer wie in geometrischer Hinsicht, so daß die letztere Art durchaus nicht als ein besonderer Fall der ersteren angesehen werden kann. Eine ebene Kurve dritter Ordnung ist der Schnitt einer Fläche dritter Ordnung mit einer Fläche erster Ordnung. Eine Raumkurve dritter Ordnung ist aber der Schnitt zweier Flächen zweiter Ordnung, welche sich außerdem noch in einer geraden Linie schneiden. Eine Fläche m^{ter} und n^{ter} Ordnung schneiden sich in einer Kurve $m \cdot n^{\text{ter}}$ Ordnung, Eine Fläche $m_1{}^{\text{ter}}$ und $n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Kurve $m_1 \cdot n_1{}^{\text{ter}}$ Ordnung. Wenn nun z. B. $m \cdot n = m_1 \cdot n_1$ ohne daß die beiden Faktoren m und n mit den beiden Faktoren m_1 und n_1 übereinstimmen, so ist klar, daß der analytische Charakter beider Kurven durchaus verschieden sein kann. Es gibt eben verschiedene Arten oder „species“ von Raumkurven derselben Ordnung.

lineare und homogene (bilineare) Gleichung zwischen den Richtungskosinus von l und l_1 ausgedrückt:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cos\alpha \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha \cos\beta_1 + A_3 \cos\alpha \cos\gamma_1 \\ + B_1 \cos\beta \cos\alpha_1 + B_2 \cos\beta \cos\beta_1 + B_3 \cos\beta \cos\gamma_1 \\ + C_1 \cos\gamma \cos\alpha_1 + C_2 \cos\gamma \cos\beta_1 + C_3 \cos\gamma \cos\gamma_1 \end{array}\right\} = 0. \qquad 5)$$

wie z. B. eine solche bei Gelegenheit der konjugierten Durchmesser gefunden worden ist [3), § 18], nur daß dort S und S_1 zusammenfielen, hier aber nicht. Bezeichnet man mit abc und $a_1 b_1 c_1$ die Koordinaten von S und S_1 und führt ferner einen beliebigen Punkt $P(xyz)$ auf l und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ auf l_1 ein, so folgt:

$$\begin{array}{l} \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x - a : y - b : z - c \\ \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = x_1 - a_1 : y_1 - b_1 : z_1 - c_1, \end{array} \qquad 6)$$

Zu jedem Strahl l gibt es einen Strahl l_1, welcher ihn schneidet. Für zwei solche Strahlen kann man die beiden laufenden Punkte P und P_1 mit dem Schnittpunkt zusammenfallen lassen und setzen:

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1.$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1(x-a)(x-a_1) + A_2(x-a)(y-b_1) + A_3(x-a)(z-c_1) \\ + B_1(y-b)(x-a_1) + B_2(y-b)(y-b_1) + B_3(y-b)(z-c_1) \\ + C_1(z-c)(x-a_1) + C_2(z-c)(y-b_1) + C_3(z-c)(z-c_1) \end{array}\right\} = 0, \quad 7)$$

also für den Schnittpunkt eine Gleichung zweiten Grades, d. h.:

Zwei reziprok aufeinander bezogene Bündel S und S_1 erzeugen eine Fläche zweiter Ordnung, wenn man jeden Strahl l von S mit der zugeordneten Ebene E_1 von S_1 oder umgekehrt zum Schnitt bringt.

Daß S und S_1 auf dieser Fläche liegen, ist selbstverständlich, da man SS_1 sowohl als einen Strahl l, als auch als einen Strahl l_1 ansehen kann und der Schnittpunkt dann mit S_1 bzw. S zusammenfallen muß. Auch analytisch ist dies sofort ersichtlich, da sämtliche neun Glieder auf der linken Seite von 7) verschwinden, wenn statt xyz gesetzt wird abc oder $a_1 b_1 c_1$.

Ob aber auch umgekehrt jede Fläche zweiter Ordnung:

$$\begin{array}{l} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx \\ + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{array} \qquad 8)$$

durch zwei reziproke Bündel erzeugt werden kann? Um sich hierüber Gewißheit zu verschaffen, mache man den Ansatz, daß die Gleichungen 7) und 8) identisch seien und vergleiche

nun die 10 Koeffizienten beider Gleichungen. Diejenigen von 7) sind erst durch Auflösen der Klammern und Zusammenziehen zu bilden; es entstehen dann, wenn man die Koeffizienten von 8) als gegeben ansieht, 10 Bedingungen zwischen den 15 Größen:

$$A_1 B_1 C_1, \quad A_2 B_2 C_2, \quad A_3 B_3 C_3, \quad abc, \quad a_1 b_1 c_1.$$

Man wird diesen Bedingungen also im allgemeinen auf unzählig viele Arten genügen können. Weiter ist aus dem Voraufgegangenen ersichtlich, daß zwei der Bedingungen oder doch zwei Kombinationen derselben darin bestehen müssen, daß S und S_1 beide auf der Fläche liegen. Nimmt man diese Punkte aber beliebig auf ihr an, so bleiben nur noch $10 - 2 = 8$ voneinander unabhängige Bedingungen, aber immer noch neun zu bestimmende Koeffizienten, nämlich:

$$A_1 B_1 C_1, \quad A_2 B_2 C_2, \quad A_3 B_3 C_3.$$

Daher:

Eine gegebene Fläche zweiter Ordnung kann stets als Erzeugnis zweier reziproker Bündel S und S_1, deren Zentren man beliebig auf der Fläche auswählen kann, dargestellt werden. Die Zuordnung der beiden Bündel ist sogar, selbst wenn S und S_1 bestimmt sind, noch auf unendlich viele Weisen möglich.

Der eben geführte Beweis dieses Satzes ist nur flüchtig hingeworfen und wäre nun erst nach allen Seiten hin zu erproben, worauf es aber hier, wo nur die allgemeinsten Grundzüge der projektiven Erzeugung der Flächen betrachtet werden sollten, nicht weiter ankommt. Wird die Reziprozität zur Orthogonalität, d. h. ordnet man jedem Shrahl l von S die zu ihm senkrechte Ebene E_1 von S_1 zu, so entsteht offenbar eine Kugel über SS_1 als Durchmesser. Oder läßt man die beiden Zentren S und S_1 zusammenfallen, so wird die Fläche zum Kegel und ist identisch mit der Gesamtheit aller Strahlen, welche auf den ihnen entsprechenden Ebenen liegen usw.

Daß die projektive punktweise Erzeugung der Flächen, welcher nach dem Gesetz der Dualität die Erzeugung ihrer Tangentialebenen durch reziprok aufeinander bezogene ebene Systeme gegenübersteht, zu einer Fundgrube für zahlreiche Sätze und Konstruktionen projektiven Charakters gemacht werden kann, unterliegt wohl für niemand einem Zweifel, der sich mit

dem betreffenden Kapitel der Kegelschnitte (vgl. z. B. I, § 25) vertraut gemacht hat. Freilich sind die analogen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung nicht so einfach und daher auch nicht so unmittelbar praktisch verwertbar, so daß z. B. die Übertragung der beiden schönen Sätze vom Pascalschen und vom Brianchonschen Sechseck wohl möglich und sogar auf verschiedene Arten möglich ist, aber doch nur mit Verzichtleistung auf die gleiche Durchsichtigkeit und Anwendbarkeit. Auch liegt dieses Gebiet zweifellos höher, als dem Aufstieg allein von zwei zu drei Dimensionen entspricht, so daß nur eine gründliche Analyse unter Zugrundelegung der allgemeinen, den Dreieckskoordinaten in der Ebene verwandten Tetraederkoordinaten und ein gründliches Eingehen in die Theorie der algebraischen Formen (Invariantentheorie) dem analytischen Geometer Einsicht in den unerschöpflichen Reichtum von Sätzen und geometrischen Beziehungen, der hier zu heben ist, erschließen kann.

Büschel von Flächen zweiter Ordnung. Gegeben seien irgend zwei Flächen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} F(xyz) &\equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + \cdots = 0, \\ F_1(xyz) &\equiv a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Durch lineare Verbindung entsteht das Büschel:

$$\begin{aligned} &F(xyz) + \lambda F_1(xyz) \\ &\equiv (a_{11} + \lambda a'_{11})x^2 + 2(a_{12} + \lambda a'_{12})xy + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Es enthält, den beliebigen Werten von λ entsprechend, unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, unter denen die beiden gegebenen 9) irgend zwei sind. Diese schneiden sich in einer (reellen oder imaginären) Kurve, welche von der vierten Ordnung ist und auch Grundkurve des Büschels genannt wird, da offenbar jede Fläche desselben durch sie hindurchgehen muß. Setzt man $z = 0$, d. h. wird das Büschel 10) durch die xy-Ebene geschnitten (welche man mit irgend einer Ebene zusammenfallen lassen kann), so wird ein Kegelschnittbüschel erzeugt, dessen vier Grundpunkte (I, § 25) offenbar die vier Schnittpunkte der Ebene und der Grundkurve sind. In diesem Büschel gibt es drei Paare von geraden Linien, die zusammen die sechs Verbindungslinien der vier genannten Schnittpunkte bilden. Jede solche Linie muß daher zugleich eine gerade

Linie auf irgend einer Fläche des Büschels sein. Daß aber auch umgekehrt jede auf einer solchen Fläche liegende Gerade l die Grundkurve in zwei (reellen oder imaginären) Punkten schneiden muß, ist nicht schwer zu beweisen. Denn man schneide l mit irgend einer anderen Fläche des Büschels, so müssen die Schnittpunkte, da l ganz auf der ersteren liegt, auch auf der Grundkurve liegen.

Die Gesamtheit der Geraden des Büschels 10) fällt daher zusammen mit der Gesamtheit der Sekanten seiner Grundkurve. Von besonderer Wichtigkeit sind aber seine Kegelflächen. Nach § 16 ist $D = 0$ die analytische Bedingung für einen Kegel. Setzt man hier $a_{11} + \lambda a'_{11}$ statt a_{11}, $a_{12} + \lambda a'_{12}$ statt a_{12} usw., so entsteht eine Gleichung vierten Grades für λ. Also:

In einem Flächenbüschel gibt es im allgemeinen vier „Grenzflächen", d. h. vier Kegel. Oder auch: Es gibt im Raum vier Punkte, von welchen aus die Grundkurve in Kegeln zweiter Ordnung projiziert wird, wobei aber jede Kante, wie oben gezeigt, durch zwei Punkte der Kurve hindurchgeht und der Kegel somit, als Projektionskegel aufgefaßt, doppelt gezählt werden muß.

Es sei S die Spitze eines solchen Kegels und l irgend eine Kante desselben. Sie schneide die Grundkurve in P_1 und P_2. Führt man noch den zu S zugeordneten vierten harmonischen Punkt T ein, so sind S und T harmonische Pole in bezug auf jede Fläche des Büschels. Der geometrische Ort für T ist also der Schnitt des Kegels mit der Polarebene von S in bezug auf irgend eine Fläche des Büschels. Also hat S für alle Flächen des Büschels ein und dieselbe Polarebene, und hieraus ist zu schließen, daß die vier Spitzen S, S_1, S_2, S_3 der vier Kegel zugleich Ecken des gemeinsamen Polartetraeders aller Flächen sind. (Vgl. I, § 25.)

Das Problem der Kegel fällt daher im wesentlichen mit dem Problem des gemeinsamen Tetraeders zusammen. Rein analytisch muß der Beweis unter Zugrundelegung von Tetraederkoordinaten geführt werden, wobei sich dann herausstellt, daß beim Beziehen auf das Polartetraeder die beiden Gleichungen 9) „rein" oder von der Form werden:

$$F(xyzt) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}t^2 = 0,$$
$$F_1(xyzt) \equiv a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + a'_{33}z^2 + a'_{44}t^2 = 0$$

(vgl. I, § 25). Es wird dann auch das ganze Büschel durch die reine Gleichung:

$$(a_{11} + \lambda a'_{11})x^2 + (a_{22} + \lambda a'_{22})y^2$$
$$+ (a_{33} + \lambda a'_{33})z^2 + (a_{44} + \lambda a'_{44})t^2 = 0$$

dargestellt. Man hat nun λ nur noch so zu bestimmen, daß der Reihe nach einer der vier Koeffizienten verschwindet, wenn die Gleichungen der vier Kegel gebildet werden sollen.

Ein einfaches Beispiel wird dies erläutern. Gegeben seien die Kugel und der Kegel:

$$F \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad F_1 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{9a}$$

Man bilde das Büschel:

$$F + \lambda F_1 \equiv x^2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) + y^2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) + z^2\left(1 - \frac{\lambda}{c^2}\right) - r^2 = 0. \tag{10a}$$

Die Grundkurve des Büschels ist also hier ein sphärischer Kegelschnitt. Augenscheinlich haben alle seine Flächen denselben Mittelpunkt und dieselben Hauptebenen, nämlich den Anfangspunkt und die drei Ebenen des Koordinatensystems. Das gemeinsame Polartetraeder des Systems wird daher aus diesen drei Ebenen und der unendlich fernen Ebene gebildet. Die vier Spitzen der Kegel zweiter Ordnung, durch welche die Grundkurve, also hier ein sphärischer Kegelschnitt projiziert wird, müssen also sein: Der Anfangspunkt und die unendlich fernen Punkte der x-, der y- und der z-Achse. Drei der Kegel werden also zu Zylindern. In der Tat setze man in 10a) für λ der Reihe nach:

$$+\infty, \quad -a^2, \quad -b^2, \quad +c^2,$$

so folgt:

$$\text{I)} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\text{II)} \quad y^2\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + z^2\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) - r^2 = 0,$$

$$\text{III)} \quad x^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + z^2\left(1 + \frac{b^2}{c^2}\right) - r^2 = 0,$$

$$\text{IV)} \quad x^2\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) - r^2 = 0.$$

I) ist der zu Anfang gesetzte Kegel, II), III), IV) sind die Zylinder, und zwar sind, wenn $a > b$ II) ein hyperbolischer, III) und IV) aber elliptische Zylinder.

Die drei senkrechten Projektionen der sphärischen Ellipse auf die Hauptebenen sind also eine Hyperbel und zwei Ellipsen, die aber natürlich nur so weit in Betracht kommen, als sie innerhalb des Kreises verlaufen, in welchem sich die Kugel projiziert (siehe Fig. 36).

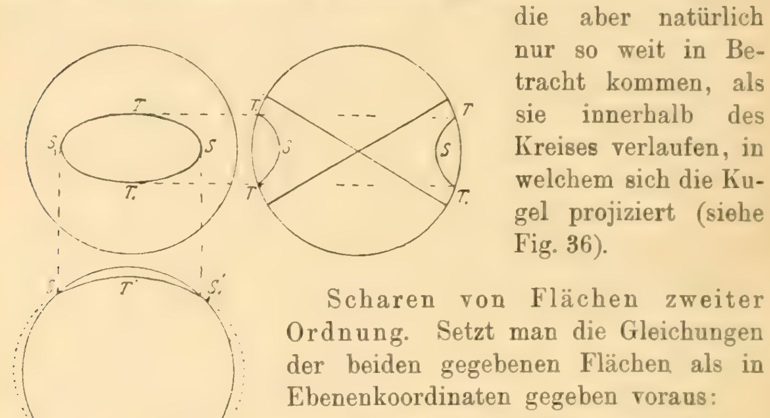


Fig. 36.

Scharen von Flächen zweiter Ordnung. Setzt man die Gleichungen der beiden gegebenen Flächen als in Ebenenkoordinaten gegeben voraus:

$$F(uvw) = 0, \quad F_1(uvw) = 0,$$

so entsteht durch lineare Verbindung:

$$F + \lambda F_1 = 0$$

eine sogenannte lineare „Schar", deren Flächen alle gemeinsame Tangentialebenen haben. Letztere umhüllen (siehe § 12) eine abwickelbare Fläche, welche von allen Flächen der Schar berührt oder „eingehüllt" wird. Im übrigen bedarf es keiner besonderen Theorie, wenn man das Prinzip der Dualität in Anwendung bringt und dann die Eigenschaften der Scharen zu denjenigen des Büschels in reziproke Beziehung setzt.

Daß die konfokalen Flächen als ein besonderer Fall der linearen Scharen anzusehen sind, ist bereits früher erwähnt worden. Eine andere Gelegenheit zur Anwendung dieser Gebilde hat z. B. eine rechnerisch sehr schwierige und unangenehme Aufgabe der Astronomie, die Ermittelung der sogenannten Schattenfläche, geboten.

Setzt man den leuchtenden Körper (Sonne) und den dunklen beide als Kugeln voraus, dann ist die Sachlage allerdings sehr einfach, da hier die Schattenfläche in zwei Kreiskegel zerfällt, die hinter dem dunklen Körper den Kernschatten und den

Halbschatten begrenzen, wie die in allen populären astronomischen Darstellungen zu findende Figur anzeigt. Wenn aber die Oberflächen beider, oder auch nur eine als ellipsoidisches vorausgesetzt werden, so tritt an Stelle der Kegel die allgemeine Schattenfläche, d. h. die vorhin genannte, beide Körper längs einer Kurve berührende abwickelbare Fläche, welche aber auch die ganze zugehörige Schar von Flächen zweiter Ordnung berührt. Unter diesen gibt es vier ebene, den vier Kegeln der Flächenbüschel entsprechende, von Kegelschnitten begrenzte Flächen, derart, daß irgend zwei dieser Grenzkurven — für die konfokalen Flächen gehen sie in die Fokalkurven über — eine sehr einfache geometrische Konstruktion der Schattenfläche ermöglichen. — Man sieht, wie zuweilen scheinbar ganz entlegene geometrische Gebilde auf einmal in durchaus praktischen Fragen auftauchen können.

Geometrische Verwandtschaften. Zum Schluß noch einige wenige Betrachtungen über geometrische Abbildungen und Verwandtschaften, unter denen die wichtigsten solche sind, wo sich Punkt und Punkt entsprechen. Sei also $P(xyz)$ irgend ein Punkt im Raum und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ sein Abbild. Dann muß es möglich sein, x_1, y_1, z_1 als Funktionen von x, y und z darzustellen. Also wird jede derartige geometrische Verwandtschaft analytisch durch drei Gleichungen von der Form:

$$x_1 = f_1(x, y, z), \quad y_1 = f_2(x, y, z), \quad z_1 = f_3(x, y, z) \qquad \textbf{11)}$$

vermittelt. So geben z. B. die Transformationsformeln in § 3, wenn in ihnen nicht xyz und $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf verschiedene Koordinatensysteme vorstellen — so wie es früher der Fall war —, sondern wenn sie als Koordinaten verschiedener Punkte in bezug auf dasselbe oder auch in bezug auf verschiedene Systeme betrachtet werden, die allgemeinsten Formeln für die Abbildung durch Kongruenz. Will man aus ihnen die Abbildung durch Ähnlichkeit machen, so multipliziere man alle Koeffizienten mit dem Proportionalitätsfaktor k. (Vgl. I, § 26.)

Durchgreifender ist die allgemeine affine Abbildung:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4, \\ y_1 &= b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4, \\ z_1 &= c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4, \end{aligned} \qquad \textbf{12)}$$

in welcher die zwölf Koeffizienten irgendwelche Werte haben können, nur daß, wenn die Abbildung umkehrbar sein soll, die Determinante aus den neun Koeffizienten der Veränderlichen nicht verschwinden darf. Man beweist ohne Mühe, daß parallele Ebenen sich in parallele Ebenen, parallele Gerade in parallele Gerade transformieren, daß daher die Teilungsverhältnisse zwischen drei in gerader Linie liegenden Punkten keine Änderung erleiden und im besonderen die Mitte zwischen zwei Punkten Mitte bleibt.

Aus Kugeln werden ähnliche und mit den Achsen gleichgerichtete Ellipsoide, woraus leicht zu folgern ist, daß die allgemeinste Affinität durch Zusammensetzung von Kongruenz mit nachfolgender Ausdehnung oder Zusammenziehung in drei zueinander senkrechten Richtungen (siehe § 18) entsteht. Daß jede Abbildung im Unendlichkleinen affin ist, wird wie in I, § 26 bewiesen. Wie also auch z. B. ein elastischer Körper durch auf ihn ausgeübte Drucke oder Spannungen, oder eine Flüssigkeit oder ein Gas — natürlich ohne Verletzung der Kontinuität oder des Zusammenhanges — deformiert wird, immer werden aus unendlich kleinen Kugeln unendlich kleine Ellipsoide, deren Hauptachsen die Richtungen der „Hauptdilatationen“ ergeben, welche wieder zugleich die Richtungen der „Normaldrucke“ sind, wenn der Körper isotrop ist, d. h. nach allen Richtungen gleiche Elastizität zeigt.

Kongruenz, Ähnlichkeit und Affinität sind besondere Fälle der allgemeinen Kollinearität, welche analytisch durch drei gebrochene lineare Funktionen mit demselben Nenner oder auch nach Einführung homogener bzw. tetraedrischer Koordinaten durch vier homogene lineare Funktionen dargestellt wird:

$$x_1 = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4},$$
$$y_1 = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4}, \qquad 13)$$
$$z_1 = \frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4}{d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4}.$$

Die 16 Koeffizienten sind ganz willkürlich, nur darf ihre Determinante nicht verschwinden. Ebenen werden in Ebenen,

gerade Linien in geraden Linien abgebildet (daher der Name). Ordnung und Klasse der Flächen bleiben unverändert, alle projektiven Eigenschaften bleiben erhalten.

Perspektivität ist eine besondere Abart der Kollinearität, bei der die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen und denselben Punkt, das Zentrum der Perspektivität, gehen, während die Schnittgeraden entsprechender Ebenen in einer Ebene, der Ebene der Perspektivität, liegen. Eine andere merkwürdige Abart, die hier nur kurz erwähnt werden mag, ist die, in welcher die genannten Verbindungs- und Schnittlinien zwei beliebige zueinander windschiefe Gerade im Raum schneiden.

Reziproke Verwandtschaft. Setzt man in 13) statt $x_1 y_1 z_1$ die Koordinaten einer Ebene $u_1 v_1 w_1$, während rechts xyz stehen bleiben soll, so entsteht die allgemeine reziproke Verwandtschaft räumlicher Systeme, wo jedem Punkt eine Ebene und umgekehrt entspricht. Ein besonderer Fall derselben ist die Polarität, bei welcher: $a_2 = b_1$, $a_3 = c_1$, $a_4 = d_1$, $b_3 = c_2$, $b_4 = d_2$, $c_4 = d_3$. Die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung, auf welche sich diese Polarität bezieht, wird dann durch die Bedingung ausgedrückt, daß $P(xyz)$ auf der Ebene $E(u_1 v_1 w_1)$ liegen soll:

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0. \tag{14}$$

Aber auch im allgemeinen Falle gibt diese Bedingung eine Gleichung zweiter Ordnung. Wenn indessen:

$$a_1 = b_2 = c_3 = d_4 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 = -b_1, \; a_3 = -c_1 \quad \text{usw.},$$

so wird die Bedingung 14) identisch erfüllt. Jeder Punkt liegt dann auf der ihm entsprechenden Ebene und die Verwandtschaft wird zum Nullsystem, das schon früher aufgestellt*) (§ 11) und etwas genauer untersucht worden ist.

Diese wenigen Bemerkungen über räumliche geometrische Verwandtschaften sollen nicht mehr sein, als eine erste Einführung in ihre Theorie. Im übrigen wird auf das Schlußkapitel des ersten Teils dieses Lehrbuches verwiesen, das im wesentlichen unverändert übertragen werden kann.

*) Daß das Nullsystem keine Analogie in der Ebene hat, liegt in dem Umstande, daß die Determinante der Koeffizienten dort verschwinden würde. Siehe die Aufgabe über „schiefe“ Determinanten in I. § 20.

Übungsaufgaben.

1. Gegeben zwei Punkte P und Q im Raume. Jeder durch P gehenden Geraden l wird die auf ihr senkrechte, durch Q gehende Ebene zugeordnet und umgekehrt. Nachher wird das Bündel P um eine beliebige durch P gehende Achse gedreht. Welche Art von Flächen erzeugen dann die beiden Bündel P und Q?

2. Welche Kegel zweiter Ordnung lassen sich durch zwei zueinander kongruente Ebenenbüschel mit sich schneidenden Achsen, und welche Hyperboloide durch solche mit windschiefen Achsen erzeugen?

3. Gegeben zwei Gerade l und l_1 im Raum. Jeder Ebene E durch l wird die auf ihr senkrechte Ebene E_1 durch l_1 zugeordnet. Hat die durch diese projektivischen Büschel erzeugte Fläche eine besondere Eigentümlichkeit?

4. Man versuche, kollineare Abbildungen der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ auf sich selbst, wenn möglich alle zu finden.

Anhang.

Lösungen zu den Übungsaufgaben.

§ 1.

1. Jede Kante ist $= \sqrt{2}$.

2. $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = +\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

3. Die gegenüberliegenden Kanten sind einander gleich. Das Tetraeder wird von vier kongruenten Dreiecken mit den Seiten $2\sqrt{74}$, $2\sqrt{65}$, $2\sqrt{41}$ begrenzt.

4. Wählt man in 5), § 1 die Wurzel bei l_1 und l_2 positiv, so entstehen nach 13) für $l(\alpha\beta\gamma)$ die drei Gleichungen:

$$6\cos\alpha + 8\cos\beta + 24\cos\gamma = +13,$$
$$2\cos\alpha + 2\cos\beta + 2\cos\gamma = +3,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

hieraus:

$$\cos\alpha = \frac{206 \mp 8\sqrt{38}}{292}, \quad \cos\beta = \frac{188 \pm 9\sqrt{38}}{292}, \quad \cos\gamma = \frac{44 \mp \sqrt{38}}{292}.$$

Wählt man beide Wurzeln negativ, so wechseln $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Vorzeichen. Ist aber die eine positiv, die andere negativ, so entstehen imaginäre Richtungen:

$$\cos\alpha = \frac{-466 \mp 8i\sqrt{2926}}{292}, \quad \cos\beta = \frac{-370 \pm 9i\sqrt{2926}}{292},$$
$$\cos\gamma = \frac{+398 \pm i\sqrt{2926}}{292}.$$

5. Die Ecken seien $P_1(x_1 y_1 z_1)$ usw. Nach 11) und 15) sind die drei Bedingungen des Senkrechtstehens:

$$0 = (x_1 - x_2)(x_0 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_0 - y_3) + (z_1 - z_2)(z_0 - z_3),$$
$$0 = (x_2 - x_0)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_0)(y_1 - y_3) + (z_2 - z_0)(z_1 - z_3),$$
$$0 = (x_0 - x_1)(x_2 - x_3) + (y_0 - y_1)(y_2 - y_3) + (z_0 - z_1)(z_2 - z_3).$$

Durch Addition entsteht die Identität $0 = 0$, d. h. jede Bedingung folgt aus den beiden anderen.

6. Da z. B. $P_1 P'_3 P_2 P'_4$ ein Parallelogramm sein soll, so muß sein:

$$x'_3 - x_1 = x_2 - x'_4, \quad x'_3 + x'_4 = x_1 + x_2.$$

Aus diesen und den analogen Gleichungen:

$$x'_1 = \frac{x_2 + x_3 + x_4 - x_1}{2} \text{ usw.}$$

Soll das Parallelepiped ein Rechtflach werden, so mache man nach 11a) und 15a) den Ansatz, daß $P_1 P'_3 \perp P_2 P'_3$ usw. Er führt zu der Gleichung:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2,$$

d. h. die Gegenseiten des gegebenen Tetraeders müssen einander gleich sein. (Siehe Übungsaufgabe 3.)

§ 2.

1. Es seien $P_1(x_1 y_1 z_1)$ usw. die vier Ecken. Dann sind die Koordinaten der Mitte von $P_1 P_2$: $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}$ und der Mitte von $P_3 P_4$: $\frac{x_3 + x_4}{2}, \frac{y_3 + y_4}{2}, \frac{z_3 + z_4}{2}$, also der Mitte beider Mitten: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ usw., d. h. die Koordinaten des Schwerpunktes.

2. Nach 7), § 2 kann man setzen:

$$\begin{aligned} x_1 &= +4 - 5\mu_1, & y_1 &= +6 - 10\mu_1, & z_1 &= -2 + 5\mu_1, \\ x_2 &= -5 + 9\mu_2, & y_2 &= +1 + 1\mu_2, & z_2 &= 0 + 7\mu_2, \\ x_3 &= +1 - 8\mu_3, & y_3 &= +2 - 7\mu_3, & z_3 &= +3 - 2\mu_3. \end{aligned}$$

Es soll sein: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ usw. Dies gibt die drei Gleichungen:

$$15 - 5\mu_1 - 18\mu_2 - 8\mu_3 = 0, \quad 6 - 10\mu_1 - 2\mu_2 - 7\mu_3 = 0,$$
$$1 + 5\mu_1 - 14\mu_2 - 2\mu_3 = 0.$$

Hieraus: $\mu_1 = +\frac{211}{65}$, $\mu_2 = +\frac{24}{13}$, $\mu_3 = -\frac{56}{13}$, und damit die drei Punkte:

$$Q_1\left(-\frac{159}{13}, -\frac{344}{13}, +\frac{185}{13}\right), \quad Q_2\left(+\frac{151}{13}, +\frac{37}{13}, +\frac{168}{13}\right),$$
$$Q_3\left(+\frac{461}{13}, +\frac{418}{13}, +\frac{151}{13}\right).$$

3. Auf l_1 mögen liegen Q_1 und Q'_1, auf l_2: Q_2 und Q'_2, auf l_3: Q_3 und Q'_3, so daß das windschiefe Sechseck $Q_1 Q'_1 Q_2 Q'_2 Q_3 Q'_3$ aus sechs Kanten des Parallelepipeds gebildet ist. Dann ist $Q_1 Q'_1 =$ und $\parallel Q_3 Q'_2$, $Q_2 Q'_2 =$ und $\parallel Q_1 Q'_3$, $Q_3 Q'_3 =$ und $\parallel Q_2 Q'_1$. Dies gibt neun Gleichungen. Drei derselben sind:

$$x'_1 - x_1 = x'_2 - x_3, \quad x'_2 - x_2 = x'_3 - x_1, \quad x'_3 - x_3 = x'_1 - x_2,$$

und die übrigen entstehen durch Vertauschung von x mit y und z. Da aber die Addition entsprechender Gleichungen die Identität $0 = 0$ ergibt, so bleiben sechs unabhängige Gleichungen. Nach Einführung der Parameter μ_1, μ'_1, μ_2, μ'_2, μ_3, μ'_3 wie in 2) erhält man drei Gleichungen für $\mu'_1 - \mu_1$, μ'_2, μ_3 und drei Gleichungen für $\mu'_2 - \mu_2$, μ'_3 und μ_1. Durch Auflösung:

$$\mu_1 = -\frac{264}{130}, \quad \mu'_1 = +\frac{343}{130}, \quad \mu_2 = +\frac{67}{26}, \quad \mu'_2 = +\frac{29}{26},$$

$$\mu_3 = -\frac{23}{26}, \quad \mu'_3 = +\frac{66}{26},$$

und damit die sechs Punkte:

$$Q_1\left(-\frac{160}{26}, -\frac{372}{26}, +\frac{212}{26}\right), \quad Q_2\left(+\frac{473}{26}, +\frac{93}{26}, +\frac{469}{26}\right),$$

$$Q_3\left(+\frac{210}{26}, +\frac{213}{26}, +\frac{124}{26}\right),$$

$$Q'_1\left(-\frac{239}{26}, -\frac{530}{26}, +\frac{291}{26}\right), \quad Q'_2\left(+\frac{131}{26}, -\frac{55}{26}, +\frac{203}{26}\right),$$

$$Q'_3\left(-\frac{502}{26}, -\frac{410}{26}, -\frac{54}{26}\right).$$

Zur Probe berechne man die Mitten der drei Körperdiagonalen $Q_1 Q'_2$, $Q_2 Q'_3$, $Q_3 Q'_1$. Man findet jedesmal denselben Punkt: $M\left(-\frac{29}{52}, -\frac{317}{52}, +\frac{415}{52}\right)$ (Schwerpunkt). Die Berechnung der letzten Ecken Q_4 und Q'_4 ($Q_4 Q_1$ Flächendiagonale) ist nun sehr einfach. Denn es ist $x_4 + x_1 = x'_1 + x'_3$ usw. Hieraus:

$$Q_4\left(-\frac{581}{26}, -\frac{568}{26}, +\frac{25}{26}\right), \quad Q'_4\left(+\frac{552}{26}, +\frac{251}{26}, +\frac{390}{26}\right).$$

4. Es ist $V = 6 \times$ Tetraeder $Q_1 Q'_1 Q'_3 Q'_4$. Hier könnte sofort 5), § 2 angesetzt und ausgerechnet werden. Besser aber setzt man für $x'_3 - x_1$ ein: $x'_2 - x_2$ und für $x'_4 - x_1$: $-(x'_3 - x_3)$.

Dann lassen sich, da $x'_1 - x_1 = -5\,(\mu'_1 - \mu_1)$ usw., die drei Faktoren $\mu'_1 - \mu_1$, $\mu'_2 - \mu_2$ und $\mu'_3 - \mu_3$ absondern und es folgt:

$$V = +5\,(\mu'_1 - \mu_1)\cdot(\mu'_2 - \mu_2)\cdot(\mu'_3 - \mu_3)\cdot\begin{vmatrix} +1 & +9 & -8 \\ -2 & -1 & -7 \\ -1 & +7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot \frac{79}{26} \cdot \frac{38}{26} \cdot \frac{89}{26} \cdot 26 = \frac{667\,945}{338} = 1976\tfrac{57}{338}.$$

5. Es ist nach 10), § 1:

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ usw.}$$

Hier kommen die Koordinaten jedes der beiden Punkte in der zweiten Potenz vor, während die Formeln 5) oder 5a) für den gesuchten Inhalt T in bezug auf jede der zwölf Koordinaten linear, wenn auch im ganzen vom dritten Grade sind. Also wird es sich wohl empfehlen, 5) nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten (I, § 20) zu quadrieren und dabei die Horizontalreihen zu komponieren.

Die Komposition gleicher Horizontalreihen ergibt ohne weiteres r_{12}^2, r_{13}^2, r_{14}^2; diejenige ungleicher aber erfordert erst eine Umgestaltung. Wird z. B. die erste und zweite genommen, so folgt:

$$(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_3 - z_1).$$

Nun wende man auf jedes der drei Produkte die Identität an:

$$a \cdot b = \frac{a^2 + b^2 - (a - b)^2}{2}$$

und vereinige. So entsteht der Ausdruck:

$$\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2}{2}.$$

Daher:

$$T^2 = \frac{1}{36}\begin{vmatrix} r_{12}^2 & \dfrac{r_{13}^2 + r_{12}^2 - r_{32}^2}{2} & \dfrac{r_{14}^2 + r_{12}^2 - r_{42}^2}{2} \\ \dfrac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2}{2} & r_{13}^2 & \dfrac{r_{14}^2 + r_{13}^2 - r_{43}^2}{2} \\ \dfrac{r_{12}^2 + r_{14}^2 - r_{24}^2}{2} & \dfrac{r_{13}^2 + r_{14}^2 - r_{34}^2}{2} & r_{14}^2 \end{vmatrix}$$

Dies ist die verlangte Formel, allerdings in unsymmetrischer Gestalt. Der zweite Ausdruck für T in 5a) gibt bei gleicher Behandlung offenbar überhaupt keine Entfernungen; wohl aber kann man aus ihm nach abermaliger Erhöhung des Grades der Determinante um eine Einheit auf die folgende, freilich nicht sehr nahe liegende Weise ein symmetrisches Resultat erzielen.

Man füge in der Determinante 5a) zu der aus vier Einsen bestehenden Vertikalreihe noch links die Reihe hinzu:

$$1,\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2,\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2.$$

wobei die neue 1 das erste Element der neu hinzutretenden Horizontalreihe werden soll, und setze die noch ausstehenden vier Elemente dieser Reihe $= 0$. Der so umgeformte Ausdruck für T sei T_1. Darauf vertausche man in T_1 die beiden ersten Vertikalreihen, wobei ein Vorzeichenwechsel eintritt, und multipliziere dann die drei letzten Vertikalreihen samtlich mit -2. Der so umgewandelte Ausdruck ist dann $T_2 = 8\,T_1 = 8\,T$. Nunmehr multipliziere man die beiden entstandenen Determinanten fünften Grades T_1 und T_2 durch Komponieren der Horizontalreihen.

Die erste und die erste Reihe geben dann offenbar 0. Die erste Reihe von T_1 mit einer anderen Reihe von T_2 und umgekehrt gibt stets eine 1. Zwei gleichvielte Horizontalreihen geben wieder 0. Denn durch Komponieren z. B. der zweiten Reihe in T_1 mit der zweiten Reihe in T_2 entsteht:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot 1 + 1 \cdot (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + x_1 \cdot (-2\,x_1) + y_1 \cdot (-2\,y_1) + z_1 \cdot (-2\,z_1) = 0.$$

Die übrigen Kompositionen ergeben aber endlich die Quadrate der Kanten. Denn die zweite Reihe von T_1 und die dritte von T_2 liefern:

$$(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot 1 + 1 \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + x_1 \cdot (-2\,x_2) + y_1 \cdot (-2\,y_2) + z_1 \cdot (-2\,z_2) = r_{12}^2 \text{ usw.}$$

Daher endlich:

$$T^2 = \frac{1}{288} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & r_{21}^2 & r_{31}^2 & r_{41}^2 \\ 1 & r_{12}^2 & 0 & r_{32}^2 & r_{42}^2 \\ 1 & r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{43}^2 \\ 1 & r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Anmerkung: Diese Formel wird noch durchsichtiger, wenn außer in der ersten Reihe die Nullen ersetzt werden durch r_{11}^2, r_{22}^2, r_{33}^2, r_{44}^2, d. h. durch die Abstände der vier Ecken von sich selbst. Setzt man in 6) oder 7) $T = 0$, so entsteht die viel benutzte Beziehung zwischen den sechs Entfernungen von irgend vier in einer Ebene liegenden Punkten. Sie lautet nach der (recht mühsamen) Ausrechnung der Determinante 7) oder 6):

$$0 = -2\,[r_{12}^4\,r_{34}^2] + [r_{12}^2\,r_{34}^2]\,[r_{12}^2] - [r_{12}^2\,r_{23}^2\,r_{31}^2],$$

wo jede eckige Klammer eine Summe bedeutet, die durch Addition aller durch Permutation der Indizes entstandenen entsprechenden Glieder zu bilden ist, also z. B.:

$$[r_{12}^4\,r_{34}^2] = r_{12}^4\,r_{34}^2 + r_{12}^2\,r_{34}^4 + r_{13}^4\,r_{24}^2 + r_{13}^2\,r_{24}^4 + r_{14}^4\,r_{23}^2 + r_{14}^2\,r_{23}^4.$$

§ 3.

1. Beide Systeme haben den Anfangspunkt gemein; läßt sich also nachweisen, daß außerdem noch ein Punkt P existiert, der in beiden Systemen dieselben Koordinaten hat, so ist OP die Drehungsachse. Man mache daher in 3) und 3a) den

Ansatz: $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Es folgen z. B. die beiden Gleichungen:

$$(a_1 - 1)x + a_2 y + a_3 z = 0, \quad (a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 z = 0;$$

also auch:

$$-(b_1 - a_2)\,y + (a_3 - c_1)\,z = 0.$$

Hieraus und aus den entsprechenden Gleichungen:

$$x : y : z = c_2 - b_3 : a_3 - c_1 : b_1 - a_2.$$

Daß diese Werte in der Tat die Gleichungen erfüllen, folgt durch Einsetzen, z. B.:

$$(a_1 - 1)(c_2 - b_3) + a_2(a_3 - c_1) + a_3(b_1 - a_2)$$
$$= (a_1 c_2 - c_1 a_2) + (b_1 a_3 - a_1 b_3) - c_2 + b_3 = 0 \quad [6), \S\, 3].$$

Nach 2), § 1 sind also die Richtungskosinus der Drehachse proportional zu:

$$c_2 - b_3, \quad a_3 - c_1, \quad b_1 - a_2.$$

2. Es ist $a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$, also auch $b_1^2 - a_2^2 = a_3^2 - c_1^2$ usw. Ferner eliminiere man a_1 aus den beiden Gleichungen 6), § 3, die nicht b_2 und nicht c_3 enthalten (also $c_2 = \cdots$, $b_3 = \cdots$). Es folgt: $c_2^2 - b_3^2 = a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1$, also:

$$c_2^2 - b_3^2 = a_3^2 - c_1^2 = b_1^2 - a_2^2 = a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1.$$

3. Aus: $c_2 - b_3 : a_3 - c_1 : b_2 - a_2 = n : p : q$ folgt nach **2.** sofort:

$$c_2 + b_3 : a_3 + c_1 : b_1 + a_2 = \frac{1}{n} : \frac{1}{p} : \frac{1}{q} = pq : qn : np.$$

Daher nach Einführung zweier Proportionalitätsfaktoren λ und μ, wenn noch [im Hinblick auf 12)] $\frac{\lambda}{\mu} = m$, $\lambda = \mu m$ gesetzt wird:

$$c_2 - b_3 = \mu \cdot m \cdot n, \quad c_2 + b_3 = \mu \cdot p \cdot q \text{ usw.}$$

Hieraus: $c_2 = \mu \dfrac{pq + mn}{2}$, $\quad b_3 = \mu \dfrac{qp - mn}{2}$.

Setzt man diese und die entsprechenden Werte für a_3, c_1, b_1, a_2 in die Relation: $c_2^2 - b_3^2 = a_3 b_1 c_2 - a_2 b_3 c_1$ ein, so folgt:

$$\mu^2 mnpq = \frac{\mu^3}{8}\Big[(nq + mp)(qp + mn)(pn + mq)$$
$$- (nq - mp)(qp - mn)(pn - mq)\Big].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist entwickelt $= 2\,mnqp(m^2 + n^2 + p^2 + q^2)$, daher $\mu = \frac{4}{m^2 + n^2 + p^2 + q^2} = \frac{4}{N}$, und somit: $c_2 = 2\,\frac{pq + mn}{N}$ usw., d. h. die Formeln 12), § 3 mit Ausnahme derer für a_1, b_2 und c_3. Die letzteren ergeben sich dann aus 6), z. B. $a_1 = \frac{a_3 b_1 - c_2}{b_3}$ nach angemessener Umformung.

4. Die Vertauschbarkeit tritt nach 3) und 3′) ein, wenn $c_2 = b_3$, $a_3 = c_1$, $b_1 = a_2$. Dies gibt nach 12) $mn = mp = mq = 0$, also entweder $n = p = q = 0$, d. h. Identität ($x = x'$, $y = y'$, $z = z'$) oder $m = 0$. Dann folgt nach 12):

$$a_1 = \frac{n^2 - p^2 - q^2}{N}, \quad b_2 = \frac{-n^2 + p^2 - q^2}{N}, \quad c_3 = \frac{n^2 + p^2 - q^2}{N},$$

$$c_2 = b_3 = \frac{2\,pq}{N}, \quad a_3 = c_1 = \frac{2\,qn}{N}, \quad b_1 = a_2 = \frac{2\,np}{N}$$

$\left(\text{also für diesen Fall: } a_1 + b_2 + c_3 = -\frac{n^2 + p^2 + q^2}{N} = -1\right)$.

Setzt man noch $n = p = q$, also $N = 3\,n^2$, so wird:

$$a_1 = b_2 = c_3 = -\frac{1}{3}, \quad c_2 = b_3 = a_3 = c_1 = b_1 = a_2 = +\frac{2}{3}.$$

Die Transformation 3) wird:

$$x = -\frac{x'}{3} + \frac{2\,y'}{3} + \frac{2\,z'}{3}, \quad y = \frac{2\,x'}{3} - \frac{y'}{3} + \frac{2\,z'}{3},$$

$$z = \frac{2\,x'}{3} + \frac{2\,y'}{3} - \frac{z'}{3}.$$

§ 4.

1. Es sei $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$; $A(0, y_0, z_0)$, $B(x_1, 0, z_1)$, $C(x_2, y_2, 0)$, $P(x, y, z)$.

Setze $\frac{a-c}{a-b} = \mu$, $\frac{a}{a-b} = \lambda$, dann ist nach 7), § 2:

$$x_2 = \mu x_1, \quad y_2 = (1-\mu)\,y_0, \quad 0 = z_0 + \mu\,(z_1 - z_0);$$
$$x = \lambda x_1, \quad y = (1-\lambda)\,y_0, \quad z = z_0 + \lambda\,(z_1 - z_0).$$

Außerdem: $(AB)^2 = (a-b)^2 = x_1{}^2 + y_0{}^2 + (z_1 - z_0)^2$. Aus diesen sieben Gleichungen sind x_0, y_0, x_1, z_1, x_2, y_2 zu eli-

minieren. Also lasse man die beiden ersten Gleichungen fort und bilde die Kombination $z = (\lambda - \mu)(z_1 - z_0)$. Dann ist:

$$x_1 = \frac{x}{\lambda} = x\,\frac{a-b}{a}, \quad y_0 = \frac{y}{1-\lambda} = -y\,\frac{a-b}{b}.$$

$$z_1 - z_0 = \frac{z}{\lambda - \mu} = z\,\frac{a-b}{c}$$

in die letzte Gleichung eingesetzt und $(a-b)^2$ gehoben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Dies ist die verlangte Gleichung (Ellipsoid). Noch einfacher so: Es seien $\alpha\beta\gamma$ die Richtungswinkel von l. Dann sofort:

$$x = a\cos\alpha, \quad y = b\cos\beta, \quad z = c\cos\gamma;$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{y}{b}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{c}.$$

Daher nach 3), § 1 die gesuchte Gleichung.

2. Der erste Kreis liege in der xy-Ebene. Mittelpunkt Anfangspunkt, $Q(x_0, y_0, 0)$ beliebiger Punkt auf ihm. $P(x, y, z)$ ein Punkt auf dem senkrechten Kreise (parallel zur yz-Ebene) um Q als Mittelpunkt. Dann ist:

$$x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0; \quad (y - y_0)^2 + z^2 - r^2 = 0, \quad x = x_0.$$

Hieraus ist x_0, y_0 zu eliminieren. Es folgt:

$$(y - \sqrt{r^2 - x^2})^2 + z^2 - r^2 = 0$$

oder:

$$(y^2 + z^2 - x^2)^2 - 4y^2(r^2 - x^2) = 0.$$

3. Es seien $A(p, 0, 0)$, $B(0, q, 0)$, $C(0, 0, r)$ die drei Schnittpunkte der Ebene mit den Achsen. $P(x, y, z)$ ihr Schwerpunkt. Dann ist nach 12a), § 2: $x = \frac{p}{3}$, $y = \frac{q}{3}$, $z = \frac{r}{3}$. Setzt man ferner das aus A, B, C und P_0 gebildete Tetraeder [5a), § 2] $= 0$, so folgt:

$$x_0 qr + y_0 rp + z_0 pq - pqr = 0.$$

Daher:

$$x_0 yz + y_0 zx + z_0 xy - 3xyz = 0$$

die gesuchte Gleichung.

4. Die beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ mögen in der xy-Ebene liegen. Es sei: $A(x_0, y_0, 0)$, $B(x_1, y_1, 0)$, $C(x_2, y_2, 0)$,

$A_1(x'_0, y'_0, 0)$, $B_1(x'_1, y'_1, 0)$, $C_1(x'_2, y'_2, 0)$, $P(x, y, z)$, $P_1(x', y', 0)$.
Dann soll sein:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2,$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = (x' - x'_1)^2 + (y' - y'_1)^2,$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2 = (x' - x'_2)^2 + (y' - y'_2)^2.$$

Hieraus ist x', y' zu eliminieren, um die Endgleichung für $P(x, y, z)$ zu erhalten. Die Subtraktion gibt zwei voneinander unabhängige Gleichungen, die sowohl in bezug auf x', y' als auch auf x, y linear sind und z nicht enthalten. Aus ihnen berechne man x', y' und setze eine der drei Gleichungen ein. Die Endgleichung wird daher vom zweiten Grade.

§ 5.

1. Die Achse sei z-Achse, der Mittelpunkt liege in der xy-Ebene, sein Abstand von $O = a$. Dann ist die Gleichung des Meridianschnittes in der xz-Ebene:

$$(x - a)^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

daher die Gleichung der Fläche:

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$$

oder:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

2. Die Richtungskosinus der Drehungsachse sind: $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sie bildet auch mit einer beliebigen Kante, deren Richtungswinkel $\alpha\beta\gamma$ sein mögen, einen Winkel, dessen Kosinus $= \frac{1}{\sqrt{3}}$. Daher nach 13), § 1: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1$. Nun ist $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ usw. Also nach Einsetzen und Fortschaffen der Wurzel:

$$xy + yz + zx = 0.$$

3. Die Gleichung der Fläche lautet:

$$(y^2 + z^2 - x^2)^2 - 4y^2(r^2 - x^2) = 0.$$

Man setze $x = r\cos\varphi$, so läßt sich die Wurzel ziehen. Es folgt:

$$y^2 + z^2 - r^2\cos^2\varphi - 2yr\sin\varphi = 0$$

oder:

$$(y - r\sin\varphi)^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Setzt man $z = r \cdot \cos v$, so läßt sich noch einmal die Wurzel ziehen. Daher:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r(\sin \varphi + \sin v), \quad z = r \cos v.$$

4. Durch Koordinatentransformation kann man stets erreichen, daß c_1 und c_2 verschwinden. Dann enthält die Gleichung nur noch x und y, gibt also einen Zylinder.

§ 6.

1. Es soll sein:

a) $$(y - a)^2 + (z + a)^2 = (z - a)^2 + (x + a)^2$$
$$= (x - a)^2 + (y + a)^2.$$

Diese Bedingungen werden offenbar erfüllt, wenn $x = y = z$, d. h. für alle Punkte einer durch die Ecken B und H gehenden Körperdiagonale, nach beiden Seiten unbegrenzt verlängert.

Diese ist aber wohl nur ein Teil des ganzen geometrischen Ortes? Um den anderen zu finden, bedarf es einer tieferen Untersuchung der Gleichungen a). Setzt man zunächst die beiden ersten Ausdrücke einander gleich, so folgt:

$$y^2 - x^2 = -4az + 2ax + 2ay.$$

Der Zyklus (xyz) gibt noch zwei solche Gleichungen. Man kann sie folgendermaßen schreiben und dann die Identität e) hinzufügen:

b) $$(x + y)(x - y) + 2a(y - z) - 2a(z - x) = 0,$$
c) $$-2a(x - y) + (y + z)(y - z) + 2a(z - x) = 0,$$
d) $$+2a(x - y) - 2a(y - z) + (z + x)(z - x) = 0,$$
e) $$(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0.$$

Man sieht auch hier sofort, daß die Gleichungen erfüllt sind, wenn $x = y = z$. Wird aber diese Lösung verworfen, so kann man aus je drei der Gleichungen b), c), d), e) die Verhältnisse der drei Differenzen:

$$x - y, \quad y - z, \quad z - x$$

eliminieren. Aus b), c) und e) findet man z. B. ohne Mühe:

f) $$(x + y + 2a)(y + z - 2a) - 16a^2 = 0.$$

Diese Gleichung f) wird nun nicht mehr zur Identität für $x = y = z$. Stellt man sie, oder eine andere, dem Zyklus (xyz) entsprechende den Gleichungen a) zur Seite, so ist also die Körperdiagonale BH eliminiert und es bleibt der andere Teil des Ortes übrig.

Viel vorteilhafter aber ist es, die Gleichungen b), c), d), e) zu einer Parameterdarstellung zu benutzen. Setzt man nämlich:

$$\frac{y-z}{x-y} = \lambda$$

und benutzt e), so folgt:

$$(y-z) = \lambda(x-y), \quad (z-x) = -(1+\lambda)(x-y).$$

Dies gibt, in b), c), d) eingesetzt:

$$x+y = -2a(1+2\lambda), \; y+z = 2a\frac{2+\lambda}{\lambda}, \; z+x = -2a\frac{\lambda-1}{\lambda+1}$$

und hieraus:

$$\text{g)} \quad x = -a\frac{2\lambda^3+5\lambda^2+3\lambda+2}{\lambda^2+\lambda}, \; y = a\frac{-2\lambda^3-\lambda^2+\lambda+2}{\lambda^2+\lambda},$$

$$z = a\frac{2\lambda^3+3\lambda^2-5\lambda+2}{\lambda^2+\lambda}.$$

Diese Parameterdarstellung gehört dem anderen Teil des gesuchten Ortes an. Er ist eine Raumkurve dritter Ordnung (§ 22) und liegt auf einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung aus f) und den durch den Zyklus (xyz) entstehenden durch Addition entspringt. Sie ist:

$$x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3zx+36a^2 = 0$$

(vgl. S. 46 u. 47). Die Umdrehungsachse ist die Diagonale BH.

Der Zyklus (xyz) zeigt übrigens an, daß die Kurve von jeder zu BH senkrechten Ebene in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks geschnitten wird (Übungsaufgabe 3, § 7). Dies folgt a priori aus dem Umstande, daß durch ein drittel Umdrehung um BH die drei Kanten FG, CD und AE zyklisch ihre Lage wechseln.

2. Man erhält bei passender Wahl des Koordinatensystems die beiden Gleichungen:

a) $\quad x^2+z^2-2zR = 0, \quad y^2+z^2-2zr = 0,$

also, wenn z zum Parameter gemacht wird:

b) $\quad x = \sqrt{2zR-z^2}, \quad y = \sqrt{2zr-z^2}.$

Es gibt aber auch rationale Darstellungen, die freilich nicht so einfach auf der Hand liegen, da man wohl sofort eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke zweiten Grades rational machen kann (vgl. z. B. I, § 24), aber im allgemeinen

nicht zwei solche zugleich. Hier aber haben beide den Faktor $\sqrt{z}$ gemein und dieser Umstand ist zu benutzen. Aus b) folgt, daß auch:

$$u = \sqrt{\frac{2R - z}{2r - z}}$$

rational werden muß. Nach Einführung von u wird:

$$\text{c)}\quad z = \frac{2ru^2 - 2R}{u^2 - 1},\quad 2R - z = \frac{2u^2(R - r)}{u^2 - 1},\quad 2r - z = \frac{2(R - r)}{u^2 - 1}.$$

Man sieht, daß nur noch $\sqrt{2ru^2 - 2R}$ rational zu machen ist. Dies geschieht dadurch, daß man die Wurzel als Produkt schreibt und das Verhältnis der Faktoren als neue Veränderliche t ansieht. Also:

$$\text{d)}\qquad t^2 = \frac{u\sqrt{r} - \sqrt{R}}{u\sqrt{r} + \sqrt{R}},\quad u = \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{r}} \cdot \frac{1 + t^2}{1 - t^2}.$$

Nach Einsetzen in c) und darauf in b):

$$x = \frac{4R\sqrt{r}\sqrt{R - r}\,t(1 + t^2)}{N},$$

$$y = \frac{4r\sqrt{R}\sqrt{R - r}\,t(1 - t^2)}{N},\quad z = \frac{8Rrt^2}{N},$$

wo:

$$N = R(1 + t^2)^2 - r(1 - t^2)^2.$$

3. Es seien $P_1(-a, y_1, +a)$, $P_2(+a, -a, z_2)$, $M(x, y, z)$ die drei Punkte. Dann ist zunächst:

$$x = \frac{-a + a}{2} = 0,\quad y = \frac{y_1 - a}{2},\quad z = \frac{z_2 - a}{2}.$$

Da P_1 und P_2 in einer durch die Kante FG ($y = a$, $z = -a$) gehenden Ebene liegen, so muß sein:

$$\frac{y_1 - a}{a + a} = \frac{-a - a}{z_2 + a}.$$

Daher:

$$x = 0,\quad yz = -a^2,$$

d. h. die Kurve ist eine gleichseitige, in der yz-Ebene liegende Hyperbel.

4. Da die Massenpunkte sich gleichförmig und geradlinig bewegen sollen, so werden ihre Koordinaten ganze, lineare Funktionen der Zeit t, also:

$$x_1 = a_1 + b_1 t,\quad y_1 = c_1 + d_1 t,\quad z_1 = e_1 + f_1 t \quad \text{usw.}$$

Mithin werden auch die Koordinaten des Schwerpunktes:

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ usw.}$$

lineare Funktionen der Zeit; d. h. der Schwerpunkt bewegt sich auch geradlinig und gleichförmig. Offenbar gilt der Satz auch für beliebig viele Massenpunkte.

§ 7.

1. Die Gleichung der Ebene möge sein:

$$ax + by + cz + d = 0$$

und Hessesche Normalform haben. So entstehen die vier Gleichungen:

$$\alpha)\quad a + b - c + d = 0,$$
$$\beta)\quad -4a + 5b + 8c + d = \pm 1,$$
$$\gamma)\quad +3a + 4b + 2c + d = \pm 2,$$
$$\delta)\quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Jede Vorzeichenkombination auf der rechten Seite in β) und γ) gibt zwei Lösungen, also zwei Ebenen. Da aber die Gleichungen α), β), γ), δ) richtig bleiben, wenn man alle Vorzeichen von a, b, c, d und die Vorzeichen der rechten Seite in β) und γ) wechselt, so entstehen nur vier Ebenen (d soll nach § 7 übrigens negativ sein!). Drückt man a, b, c aus α), β), γ) durch d aus, setzt in δ) ein, löst die quadratische Gleichung für d auf, bestimmt dann vermittelst der eben genannten Ausdrücke a, b, c, so entstehen die Gleichungen der vier Ebenen.

Sie sind:

$$\frac{\left[\begin{array}{l}(-15\sqrt{1449} \pm 610)\,x + (33\sqrt{1449} + 501)\,y \\ + (-23\sqrt{1449} \pm 321)\,z - (41\sqrt{1449} \pm 790)\end{array}\right]}{1843} = 0,$$

$$\frac{\left[\begin{array}{l}(-15\sqrt{1217} \mp 946)\,x + (33\sqrt{1217} \mp 499)\,y \\ + (-23\sqrt{1217} \mp 99)\,z - (41\sqrt{1217} \mp 1346)\end{array}\right]}{1843} = 0.$$

2. Es seien $P_0(x_0 y_0 z_0)$, $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ die drei Schnittpunkte der Ebene mit l_0, l_1, l_2. Das Verhältnis $n_0 : n_1 : n_2$ gilt auch für die Projektionen der Dreiecke, z. B. auf die xy-Ebene. Also:

$$n_0 : n_1 : n_2 = x_1 y_2 - y_1 x_2 : x_2 y_0 - y_2 x_0 : x_0 y_1 - y_0 x_1.$$

Daher:

$$\alpha)\quad n_0 x_0 + n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0,\quad n_0 y_0 + n_1 y_1 + n_2 y_2 = 0,\quad n_0 z_0 + n_1 z_1 + n_2 z_2 = 0.$$

Nimmt man für die Darstellung der Punkte einer Geraden die Form 7), § 2, also:

$$\beta)\quad x_0 = a_0 + \mu_0 \xi_0,\quad y_0 = b_0 + \mu_0 \eta_0,\quad z_0 = c_0 + \mu_0 \zeta_0 \text{ usw.},$$

so entstehen nach Einsetzen in α) drei Gleichungen ersten Grades für μ_0, μ_1 und μ_2, aus denen diese eindeutig (im allgemeinen) zu bestimmen sind. Darauf berechne man aus β) die $x_0 y_0 z_0$ usw. und lege durch P_0, P_1, P_2 die Ebene, welche dann die verlangte ist.

3. Die Gleichung ist: $x + y + z - (a + b + c) = 0$. Die drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck, denn jede Seite ist $\sqrt{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}$.

§ 8.

1. Soll eine Ebene durch die Schnittlinie von E_0 und E_1 gehen, so muß ihre Gleichung die Form haben:

$$(4x + 3y - 5z + 16) + \lambda(-3x + 2y + 4z - 7) = 0.$$

Soll sie ferner auf E_2 senkrecht stehen, so ist nach 2a):

$$(4 - 3\lambda)\cdot 1 + (3 + 2\lambda)\cdot 4 + (-5 + 4\lambda)\cdot(-2) = 0,$$

oder:

$$26 - 3\lambda = 0.$$

Die Gleichung der Ebene ist daher:

$$3(4x + 3y - 5z + 16) + 26(-3x + 2y + 4z - 7) = 0.$$

Ebenso folgen die Gleichungen der beiden anderen:

$$-26(-3x + 2y + 4z - 7) - 26(x + 4y - 2z + 5) = 0,$$

$$26(x + 4y - 2z + 5) - 3(4x + 3y - 5z + 16) = 0.$$

Die Addition gibt identisch $0 = 0$, also folgt aus zwei Gleichungen die dritte.

2. Man ermittele zunächst zwischen den fünf linken Seiten u_0, u_1 ... der Gleichungen die Identität 11):

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0,$$

welche sich in die vier Gleichungen auflöst:

$$\begin{aligned} 4\lambda_0 - 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 0,\\ 3\lambda_0 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + 5\lambda_4 &= 0,\\ -5\lambda_0 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - 3\lambda_4 &= 0,\\ +16\lambda_0 - 7\lambda_1 + 5\lambda_2 - 5\lambda_3 + 7\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus (in kleinsten ganzen Zahlen):

$$\lambda_0 = +126,\quad \lambda_1 = +41,\quad \lambda_2 = -325,\quad \lambda_3 = +200,\quad \lambda_4 = +128.$$

Dann ist die Gleichung einer der zehn Ebenen:

$$\lambda_0 u_0 + \lambda_1 u_1 = 0, \quad \text{d. h.:}\quad 381\,x + 460\,y - 466\,z + 1729 = 0.$$

(Denn sie geht zunächst durch die Gerade, in welcher E_0 und E_1 sich schneiden, andererseits kann ihre Gleichung nach der Identität in die Form $\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0$ gebracht werden, also geht sie auch durch den Durchschnittspunkt von E_2, E_3 und E_4.)

3. Wählt man irgend ein U und irgend ein V, so gibt es immer ein W, welches mit ihnen zusammen eine Identität liefert, z. B.:

$$\alpha)\qquad U_1 + V_1 - W_1 = 0,\quad U_1 - V_2 - W_2 = 0,$$
$$U_1 - V_3 - W_3 = 0,\quad U_1 - V_4 - W_4 = 0.$$

Solcher Identitäten kann man 16 bilden. Jede gibt eine der 16 Geraden. Die erste z. B. als Durchschnittsgerade der drei Ebenen:

$$\beta)\qquad U_1 = 0,\quad V_1 = 0,\quad W_1 = 0,$$

und die zweite als Durchschnittsgerade der drei Ebenen:

$$\gamma)\qquad U_1 = 0,\quad V_2 = 0,\quad W_2 = 0.$$

Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte P, da sie in ein und derselben Ebene $U_1 = 0$ liegen. Durch den Punkt P gehen aber außerdem noch zwei, im ganzen also vier Gerade. Denn aus β) und γ) folgt unter Zuhilfenahme der Identität α) (oder auch der Definitionen der V und W durch die U) auch noch $U_2 = 0$, und damit auch:

$$\delta)\qquad U_2 = 0,\quad V_2 = 0,\quad W_1 = 0,$$
$$\varepsilon)\qquad U_2 = 0,\quad V_1 = 0,\quad W_2 = 0,$$

d. h. wieder zwei Gerade.

Solcher Punkte P sind 12 vorhanden. Denn in jeder Ebene $U = 0$ liegen sechs von ihnen, und umgekehrt gehen durch jeden Punkt zwei dieser Ebenen.

Auch die 12 Punkte P zerfallen in drei Gruppen zu je vieren; derart, daß die Verbindungslinie irgend eines Punktes der ersten Gruppe mit irgend einem Punkt der zweiten Gruppe eine der 16 Geraden sein muß und durch einen Punkt der dritten Gruppe geht. Der eben genannte Punkt:

$$P:(U_1 = 0,\ U_2 = 0,\ V_1 = 0,\ V_2 = 0,\ W_1 = 0,\ W_2 = 0)$$

und der Punkt:

$$P':(U_1 = 0,\ U_3 = 0,\ V_1 = 0,\ V_3 = 0,\ W_1 = 0,\ W_3 = 0)$$

gehören zu verschiedenen Gruppen. Sie liegen auf der Geraden:

$$U_1 = 0, \quad V_1 = 0, \quad W_1 = 0,$$

und auf derselben Geraden liegt auch der zur dritten Gruppe gehörende Punkt:

$$P'':(U_1 = 0,\ U_4 = 0,\ V_1 = 0,\ V_4 = 0,\ W_1 = 0,\ W_4 = 0).$$

Die am Schluß der Aufgabe angegebene Identität ist durch Einsetzen der V und W aus ihren Definitionen nach einigen Umformungen nicht allzu schwer als richtig zu erkennen. Sie zeigt noch einmal, daß jede Ebene $U = 0$ und jede Ebene $V = 0$ mit einer Ebene $W = 0$ sich in einer Geraden schneiden müssen.

Setzt man im besonderen:

$$U_1 \equiv x, \quad U_1 \equiv y, \quad U_3 \equiv z, \quad U_4 \equiv a,$$

so fallen die vier Ebenen $U = 0$ mit den drei Koordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene ($U_4 = 0$) zusammen, während die Ebenen $V = 0$, $W = 0$, wie man sofort erkennt, von den Achsen absolut genommen dieselben Stücke a abschneiden, also die acht unendlich erweiterten Flächen eines regulären Oktaeders bilden. Von den 16 Geraden sind 12 die Kanten des Oktaeders, vier liegen unendlich fern (Durchschnittslinien paralleler Grenzflächen). Von den 12 Punkten sind sechs die Ecken des Oktaeders, die sechs übrigen unendlich fern.

Wann wird die Konfiguration ein Würfel? Die 12 Ebenen sind die Flächen und Diagonalebenen, die 12 Punkte sind die Ecken, der Mittelpunkt und die drei unendlich fernen Punkte der Kanten, die 16 Geraden sind die 12 Kanten und die vier Körperdiagonalen.

§ 9.

1. l soll durch P gehen und l_1 und l_2 schneiden, also nach 1), 10a) und 2a) die fünf Gleichungen:

$$2 = a + b, \quad -3 = c + d, \quad e + a + 5b - 3c + 2d - 17 = 0,$$
$$e + 7a + b + 3c + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2} = 0, \quad e = bc - ad.$$

Aus den beiden ersten folgt: $b = 2 - a$, $d = -3 - c$, also:

$$e = (2 - a)c - a(-3 - c) = 3a + 2c,$$

und nach Einsetzen in die dritte und vierte Gleichung:

$$-a - 3c - 13 = 0, \quad 9a + \frac{9}{2}c = 0.$$

Daher:

$$a = +2{,}6, \quad b = -0{,}6, \quad c = -5{,}2, \quad d = +2{,}2, \quad e = -2{,}6,$$

und die beiden Gleichungen von l werden:

$$l) \; y = 2{,}6\,x - 0{,}6, \quad z = -5{,}2\,x + 2{,}2.$$

Die beiden Schnittpunkte mit l_1 und l_2 werden:

$$P_1(+6, +15, -29), \quad P_2\left(-\frac{8}{7}, -\frac{25}{7}, +\frac{57}{7}\right).$$

2. Es seien a_0, b_0, c_0, d_0 die Koordinaten von l vor der Drehung und $P_0(x_0, y_0, z_0)$ irgend ein Punkt auf ihr. Also: $y_0 = a_0 x_0 + b_0$, $z_0 = c_0 x_0 + d_0$. Nach der Drehung möge P_0 in die Lage $P(x, y, z)$ gekommen sein. Es wird nach 3a), § 3:

$$x_0 = x, \quad y_0 = y\cos\varphi - z\sin\varphi, \quad z_0 = y\sin\varphi + z\cos\varphi,$$

und durch Umkehrung:

$$y = y_0\cos\varphi + z_0\sin\varphi = (a_0\cos\varphi + c_0\sin\varphi)x$$
$$+ (b\cos\varphi + d_0\sin\varphi),$$
$$z = -y_0\sin\varphi + z_0\cos\varphi = (-a_0\sin\varphi + c_0\cos\varphi)x$$
$$+ (-b_0\sin\varphi + d_0\cos\varphi),$$

also nach der Drehung:

$$a = a_0\cos\varphi + c_0\sin\varphi, \qquad b = b_0\cos\varphi + d_0\sin\varphi,$$
$$c = -a_0\sin\varphi + c_0\cos\varphi, \quad d = -b_0\sin\varphi + d_0\cos\varphi$$

und

$$e = bc - ad = b_0 c_0 - a_0 d_0 = e_0,$$

d. h. die fünfte Koordinate e hat sich nicht geändert [vgl. 10a), § 10, X und L bleiben dieselben].

3. Die drei Schnittpunkte sind:

$$A(0, +b, +d), \quad B\left(-\frac{b}{a}, 0, -\frac{e}{a}\right), \quad C\left(-\frac{d}{c}, +\frac{e}{c}, 0\right).$$

Die Bedingung, daß A Mitte von B und C sein soll, kann also nach 8a), § 2 in den drei verschiedenen Formen geschrieben werden:

$$0 = -\frac{b}{a} - \frac{d}{c}, \quad 2b = 0 + \frac{e}{c}, \quad 2d = -\frac{e}{a} + 0.$$

Sie gehen nach Einführung von $e = bc - ad$ in dieselbe Formel über:

$$0 = ad + bc.$$

4. Bezeichnet man $y - ax - b$ mit U und $z - cx - d$ mit V, so sind die Gleichungen der vier Ebenen:

$$U = 0, \quad V = 0, \quad U - \frac{a}{c} V = 0, \quad U - \frac{b}{d} V = 0.$$

Sie werden harmonisch (I, § 10, S. 126), wenn $-\frac{a}{c} = -\left(-\frac{b}{d}\right)$, d. h.

$$0 = ad + bc.$$

(Also merkwürdigerweise dieselbe Bedingung wie in 3.) Dies ist ein besonderer Fall des allgemeinen Satzes: Das Doppelverhältnis zwischen den Schnittpunkten irgend einer Geraden l mit den vier Flächen eines Tetraeders ist gleich dem entsprechenden Doppelverhältnis zwischen den vier Ebenen durch l und die Ecken des Tetraeders.

§ 10.

1. Eine Gerade l ist zur x-Achse rechtsgängig, wenn X und L dasselbe Vorzeichen haben, linksgängig, wenn entgegengesetzte. Oder auch, je nachdem XL positiv oder negativ. Desgleichen bestimmen die Vorzeichen von YM und ZN die Links- oder Rechtsgängigkeit von l in bezug auf die y- und z-Achse. Da nun $XL + YM + ZN \equiv 0$, so können nicht alle drei Ausdrücke dasselbe Vorzeichen haben; also kann auch keine Gerade zu allen drei Achsen rechtsgängig, oder zu allen drei Achsen linksgängig sein.

2. Wenn l den Würfel schneiden soll, so müssen dies auch alle durch l gehenden Ebenen tun und umgekehrt. Man betrachte also zunächst die drei Ebenen 9):

α) $yZ - zY - L = 0, \quad zX - xZ - M = 0, \quad xY - yX - N = 0.$

Für Punkte innerhalb des Würfels ist $|x| < a$, $|y| < a$, $|z| < a$ und umgekehrt.

Es folgt:

β) $|L| < a|Y| + a|Z|$, $|M| < a|Z| + a|X|$, $|N| < a|X| + a|Y|$.

Diese Ungleichungen sind daher notwendig. Daß sie aber auch hinreichen, läßt sich folgendermaßen beweisen: Man betrachte eine beliebige durch l gehende Ebene:

$$(yZ - zY - L) + \lambda(zX - xZ - M) = 0$$

oder:

$$x(-\lambda Z) + yZ + z(-Y + \lambda X) - (L + \lambda M) = 0.$$

Soll diese Ebene auch den Würfel schneiden, so muß sein:

γ) $a|\lambda Z| + a|Z| + a|-Y + \lambda X| - |L + \lambda M| > 0.$

Diese Ungleichung besteht für alle Werte von $\lambda = +\infty$ bis $\lambda = -\infty$, wenn die drei Ungleichungen β) richtig sind. Denn bezeichnet man die linke Seite mit $\varphi(\lambda)$, indem man sie als Funktion von λ betrachtet, so ist sofort ersichtlich, daß $\varphi(\lambda)$ aus mehreren aneinanderstoßenden linearen Funktionen besteht. Denn $|\lambda Z|$ ist entweder $= \lambda Z$ oder $= -\lambda Z$; $|-Y + \lambda X|$ entweder $-Y + \lambda X$ oder $Y - \lambda X$; $|L + \lambda M|$ entweder $L + \lambda M$ oder $-(L + \lambda M)$. Die Grenzen, wo die Funktionen aneinanderstoßen, sind also:

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{Y}{X}, \quad \lambda = -\frac{L}{M}.$$

Nun ist:

$\varphi(0) = a|Z| + a|Y| - |L| > 0$ (erste der Ungleichungen β),

$$\varphi\left(\frac{Y}{X}\right) = a\left|\frac{YZ}{X}\right| + a|Z| - \left|L + \frac{YM}{X}\right|,$$

oder nach der Identität:

$$XL + YM + ZN = 0,$$

$$\varphi\left(\frac{Y}{X}\right) = a\left|\frac{YZ}{X}\right| + a|Z| - \left|\frac{ZN}{X}\right| = \left|\frac{Z}{X}\right|(a|Y| + a|X| - |N|),$$

d. h.:

$$\varphi\left(\frac{Y}{X}\right) > 0 \text{ (dritte der Ungleichungen } \beta).$$

Für $\lambda = -\frac{L}{M}$ ist $\varphi(\lambda)$ sicherlich positiv, da das einzige negative Glied verschwindet.

Nun ist noch:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\lambda = +\infty}{\varphi(\lambda)} > 0 \\ \underset{\lambda = -\infty}{\varphi(\lambda)} > 0 \end{array}\right\} \text{(zweite der Ungleichungen } \beta\text{)}.$$

Es seien A und B irgend zwei der fünf Werte:

$$+\infty, \quad 0, \quad \frac{Y}{X}, \quad -\frac{L}{M}, \quad -\infty,$$

und zwar zwei solche, daß zwischen ihnen kein anderer dieser Werte liegt. Dann bezeichnet $\varphi(\lambda)$, wie gezeigt, zwischen $\lambda = A$ und $\lambda = B$ eine lineare Funktion von λ, die an diesen Grenzen positiv, mithin auch in diesem ganzen Intervall positiv ist. Folglich ist $\varphi(\lambda)$ für alle Werte von λ zwischen $+\infty$ und $-\infty$ positiv, d. h. alle durch l gelegten Ebenen schneiden, d. h. l schneidet den Würfel.

Die Bedingungen β) sind also notwendig und hinreichend.

3. Es sei $P(x, y, z)$ irgend ein Punkt im Raume und $P_1(x_1, y_1, z_1)$ derselbe Punkt nach der Schraubenbewegung. Dann ist:

$$x_1 = x + h, \quad y_1 = y\cos\alpha - z\sin\alpha, \quad z_1 = y\sin\alpha + z\cos\alpha.$$

Also, wenn ein willkürlicher Faktor λ eingeführt wird, nach 1), 3) und 4), § 10 die Koordinaten der Verbindungslinie PP_1:

$$X = \lambda h, \qquad Y = \lambda[-y(1-\cos\alpha) - z\sin\alpha],$$
$$Z = \lambda[y\sin\alpha - z(1-\cos\alpha)],$$
$$L = \lambda(y^2 + z^2)\sin\alpha, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX.$$

Hieraus sind x, y, z und λ zu eliminieren.

Es gibt also zwei Endgleichungen. Die eine ist die Identität $XL + YM + ZN = 0$. Die andere folgt aus der Zusammenstellung:

$$X = \lambda h, \quad Y^2 + Z^2 = 2\lambda^2(y^2 + z^2)(1-\cos\alpha),$$
$$L = \lambda(y^2 + z^2)\sin\alpha,$$

also die gesuchte Gleichung des Komplexes:

$$LX - k(Y^2 + Z^2) = 0, \quad \text{wo} \quad k = \frac{h}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Nun ist nach 13) und 14) (da für die x-Achse alle Koordinaten außer $X = 0$ sind):

$$\varDelta = \frac{L}{\sqrt{Y^2 + Z^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{Y^2 + Z^2}}{X},$$

also zuletzt:

$$\varDelta = k \operatorname{tg}\varphi. \quad \text{[Siehe 2), § 11, wo } \varDelta \operatorname{tg}\varphi = k.]$$

§ 11.

1. Die beiden Ausdrücke:

$$U = X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1,$$
$$V = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

ändern sich, wie aus 16) und 16a), § 10 sich erweisen läßt, durch keine Koordinatentransformation. Dasselbe folgt auch aus 13) und 14), aus denen sich ferner nach Übergang von $\cos\varphi$ zu $\operatorname{tg}\varphi$ ergibt:

$$\varDelta \operatorname{tg}\varphi = \frac{U}{V}.$$

Macht man durch eine Koordinatentransformation l_1 zur x-Achse ($L_1 = M_1 = N_1 = Y_1 = Z_1 = 0$), so wird daher:

$$\varDelta \operatorname{tg}\varphi = \frac{U}{V} = \frac{L_2}{X_2}.$$

Mithin sind l_1 und l_2 zueinander rechtsgängig, wenn U und V gleiche Vorzeichen haben [vgl. 15), § 9 und Übungsaufgabe 1, § 10].

Die Konstante des Komplexes ist: $k = \frac{U}{V}$.

2. Man lege irgend ein Nullsystem zugrunde und bilde irgend ein Tetraeder T in demselben ab. Dann entsprechen seinen vier Ecken vier Ebenen und seinen vier Flächen die vier Durchschnittspunkte dieser Ebenen. D. h. dem Tetraeder T entspricht ein anderes T'. Nun liegt im Nullsystem jeder Punkt auf der entsprechenden Ebene, also sind T und T' einander zugleich ein- und umbeschrieben.

Es seien $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ die beiden gleich großen regulären Tetraeder T und T_1. Der Umlaufssinn $B - C - D$ (außen) sei $= B_1 - C_1 - D_1$ (außen). Man lege die Tetraeder so, daß A_1 in die Mitte M des Dreiecks BCD und A in die

Mitte M_1 des Dreiecks $B_1 C_1 D_1$ falle und drehe nun noch das Tetraeder $A_1 B_1 C_1 D_1$ um seine Höhe $A_1 A$, bis die Fläche $A_1 B_1 C_1$ (in der Erweiterung) durch D geht. (Dies ist auf zwei Weisen möglich, da nach einer weiteren halben Umdrehung diese Bedingung wieder erfüllt ist.) Dann geht, der Symmetrie entsprechend, auch die Fläche $A_1 C_1 D_1$ durch B und $A_1 D_1 B_1$ durch C. Also gehen die Ebenen von T_1 durch die Ecken von T.

Ferner sind $B_1 C_1$ und $A_1 D$ als Schnittlinien der Ebene $A_1 B_1 C_1$ mit den beiden Parallelebenen $B_1 C_1 D_1$ und BCD einander parallel. Da $A_1 D \perp BC$, so auch $BC \perp A_1 C_1$. Also auch BC parallel AD_1, d. h. die Ebene ABC geht durch D_1, folglich auch ACD durch B_1, ADB durch C_1. D. h. die Ebenen von T gehen durch die Ecken von T_1.

T und T_1 sind also tatsächlich einander zugleich ein- und umbeschrieben. Die Achse des zugehörigen Nullsystems ist offenbar AA_1. Bezeichnet man mit a die Länge der Kanten, so findet man den Abstand Δ des Punktes B (oder C, D, B_1, C_1, D_1) $= \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Ferner wird der Neigungswinkel φ der Ebene $A_1 C_1 D_1$ gegen die Achse durch die Formel bestimmt: $\sin\varphi = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\varphi = +\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Also nach 2), § 11 die Konstante des Komplexes:

$$k = \Delta \operatorname{tg}\varphi = +\frac{a}{12}\sqrt{6}.$$

3. Die beiden Punkte seien: $P_1(a, 0, 0)$, $P_2(-a, 0, 0)$. Die beiden Ebenen durch l und P_1 und durch l und P_2 sind:

$$E_1 : xL + y(aZ + M) + z(-aY + N) - aL = 0,$$
$$E_2 : xL + y(-aZ + M) + z(aY + N) + aL = 0,$$

sie stehen senkrecht aufeinander, wenn:

$$L^2 + M^2 + N^2 - a^2(Y^2 + Z^2) = 0,$$

und dies ist die gesuchte Komplexgleichung.

§ 12.

1. Es seien $P(xyz)$ und $P_1(x_1 y_1 z_1)$ irgend zwei Punkte der Kurve, also:

$$y = \frac{x^2}{a}, \quad z = \frac{x^3}{a^2}; \quad y_1 = \frac{x_1^{\,2}}{a}, \quad z_1 = \frac{x_1^{\,3}}{a^2}.$$

Die Koordinaten ihrer Verbindungslinie werden nach 1) und 4), § 10, wenn der gemeinsame Faktor $x_1 - x$ fortgelassen und an seine Stelle ein beliebiger anderer Faktor k gesetzt wird:

$$\alpha)\quad X = k,\quad Y = k\,\frac{x_1 + x}{a},\quad Z = k\,\frac{x_1^2 + x_1 x + x^2}{a^2}.$$

$$\beta)\quad L = k\,\frac{x^2 x_1^2}{a^3},\quad M = -k\,\frac{x x_1 (x + x_1)}{a^2},\quad N = k\,\frac{x x_1}{a}.$$

Aus α) und β) sind k, x, x_1 zu eliminieren. Man erhält ohne Mühe folgende Endgleichungen:

$$\gamma)\qquad XL + YM + ZN = 0,$$

$$\delta)\qquad MX + NY = 0,$$

$$\varepsilon)\qquad XLa - N^2 = 0,$$

$$\xi)\qquad ZXa - Y^2 a + NX = 0.$$

γ) ist nichts anderes als die Identität 2), § 12. Die drei anderen aber, δ), ε), ξ) sind wirkliche Komplexgleichungen, die von allen Sekanten der Raumkurve erfüllt werden müssen. Sie sind aber nicht voneinander unabhängig, denn zwischen den linken Seiten U, V, W, R der Gleichungen γ), δ), ε), ξ) finden die Beziehungen statt:

$$(aU - W)\,X - aVY - NR \equiv 0,$$

$$(aU - W)\,Y - V(aZ + N) + MR \equiv 0.$$

Setzt man also $V = 0$, $R = 0$, so folgt entweder $N = 0$ und $Y = 0$ oder $aU - W = 0$, d. h. $W = 0$. Aber $X = 0$, $Y = 0$ gibt entweder $N = 0$, d. h. auch $U = V = W = R = 0$, oder $Z = 0$, d. h. eine unendlich ferne Linie. Mithin ist die Gleichung $W = 0$, hiervon abgesehen, eine Folge von $V = 0$, $R = 0$, d. h. aus ε) und ξ) folgt δ).

Eliminiert man aus den drei Gleichungen α) nur k und x_1, aber nicht x, so folgt:

$$a^2(ZX - Y^2) + axXY - x^2X^2 = 0.$$

Ist x, d. h. ist der eine Punkt P gegeben, so stellt diese Gleichung eine Bedingung für die Richtung der Sekante dar, da $X : Y : Z = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$. Sie ist vom zweiten Grade. Also wird die Kurve von jedem ihrer Punkte durch einen Kegel zweiten Grades projiziert (vgl. § 22, Raumkurven dritter Ordnung).

2. Um zu den Tangenten überzugehen, setzt man in $\alpha)$ und $\beta)$: $x_1 = x$. Es folgt:

$$\alpha')\qquad X = k,\quad Y = 2k\frac{x}{a},\quad Z = 3k\frac{x^2}{a^2},$$

$$\beta')\qquad L = k\frac{x^4}{a^3},\quad M = -2k\frac{x^3}{a^2},\quad N = k\frac{x^2}{a}.$$

Hieraus außer der Identität $XL + YM + ZN = 0$ noch die drei voneinander unabhängigen Gleichungen:

1) $3N - aZ = 0$; 2) $4XZ - 3Y^2 = 0$; 3) $4LX + MY = 0$.

3. Um die Gleichung der Tangentenfläche zu erhalten, verfahre man nach der Vorschrift, daß aus 7) und 9), § 12 die Koordinaten der Tangente eliminiert werden. Man füge also zu 1), 2), 3) noch:

4) $Zy - Yz = L$; 5) $Xz - Zx = M$; 6) $Yx - Xy = N$.

Daher:

7) $-3Xy + 3Yx - aZ = 0$; 8) $4XZ - 3Y^2 = 0$;

9) $-YZx + 4ZXy - 3XYz = 0$.

Nun ist noch $X:Y:Z$ zu eliminieren. Man bemerke, daß nach Einsetzen von 8) in 9) der Faktor Y, der im allgemeinen nicht verschwindet, fortgeschafft werden kann. Es folgt:

10) $-3Xz + 3Yy - Zx = 0$.

Aus 7) und 10):

$$X:Y:Z = (-x^2 + ay):(-xy + az):3(-y^2 + xz),$$

und nach Einsetzen in 8):

11) $4(x^2 - ay)(y^2 - xz) - (xy - az)^2 = 0$.

Dies ist die gesuchte Gleichung der Tangentenfläche. Sie ist von der vierten Ordnung.

Eine andere und hier bequemere Ableitung von 11) wäre folgende gewesen:

Man bezeichne das x des Berührungspunktes mit ξ, so daß nach α'):

$$X = k,\quad Y = 2k\frac{\xi}{a},\quad Z = 3k\frac{\xi^2}{a^2}.$$

Dann ist nach 1), § 10, wenn $P(xyz)$ ein beliebiger Punkt der Tangente: $x = \xi + X$, $y = \eta + Y$, $z = \zeta + Z$, also, da $\eta = \frac{\xi^2}{a}$, $\zeta = \frac{\xi^3}{a^2}$:

12) $x = \xi + k$, $y = \frac{\xi^2}{a} + 2k\frac{\xi}{a}$, $z = \frac{\xi^3}{a^2} + 3k\frac{\xi^2}{a^2}$.

Eliminiert man nun ξ und k, so folgt wieder 11). 12) ist eine angemessene Parameterdarstellung der Tangentenfläche.

4. Man lege zunächst durch drei beliebige Punkte der Kurve mit den Abszissen x_1, x_2, x_3 eine Ebene mit den Koordinaten u, v, w, so daß:

$$u x_1 + v \frac{x_1^2}{a} + w \frac{x_1^3}{a^2} + 1 = 0, \qquad u x_2 + v \frac{x_2^2}{a} + w \frac{x_2^3}{a^2} + 1 = 0,$$

$$u x_3 + v \frac{x_3^2}{a} + w \frac{x_3^3}{a^2} + 1 = 0.$$

Ist umgekehrt $E(u, v, w)$ gegeben, so sind x_1, x_2, x_3 Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$u x + v \frac{x^2}{a} + w \frac{x^3}{a^2} + 1 = 0,$$

oder:

$$x^3 + x^2 \frac{a v}{w} + x \frac{a^2 u}{w^2} + \frac{a^2}{w} = 0,$$

also:

$$\frac{a v}{w} = -(x_1 + x_2 + x_3), \qquad \frac{a^2 u}{w} = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1,$$

$$\frac{a^2}{w} = -x_1 x_2 x_3.$$

Für eine Schmiegungsebene fallen die drei Schnittpunkte zusammen, also $x_1 = x_2 = x_3 = x$ und:

$$\frac{a v}{w} = -3x, \qquad \frac{a^2 u}{w} = 3x^2, \qquad \frac{a^2}{w} = -x^3.$$

folglich:

$$w = -\frac{a^2}{x^3}, \quad u = -\frac{3}{x}, \quad v = +\frac{3a}{x^2},$$

oder auch:

$$u = -\frac{3}{x}, \quad v = +\frac{3}{y}, \quad w = -\frac{1}{z}.$$

Oder auch, da $y = \frac{x^2}{a}$, $z = \frac{x^3}{a^2}$:

$$13) \quad u = -\frac{3y}{az}, \quad v = +\frac{3x}{az}, \quad w = -\frac{a}{az}.$$

u, v, w erscheinen nach 13) als lineare Funktionen ersten Grades von xyz (mit demselben Nenner). Da die Gleichung $ux + vy + wz + 1 = 0$ identisch erfüllt wird, so stellt 13) ein Nullsystem vor. [Vgl. 3) und 4), § 11.] Ein Gleiches gilt für die Zuordnung von Punkten und Schmiegungsebenen bei **allen** Raumkurven dritter Ordnung.

§ 13.

1. Da man nach § 8, S. 87 jeden Ausdruck ersten Grades, also auch x, y, z (und auch jede Konstante) als lineare Funktion von irgend vier voneinander unabhängigen gegebenen Ausdrücken ersten Grades darstellen kann, so kann jede Gleichung zweiten Grades $F(x, y, z) = 0$ auch als homogene Gleichung zweiten Grades von U_1, U_2, U_3, U_4 geschrieben werden. Sie soll identisch erfüllt werden, wenn $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, also darf sie kein von U_1 und U_2 freies Glied haben, d. h. die Koeffizienten von U_3^2, $U_3 U_4$ und U_4^2 müssen $= 0$ sein. Ebenso müssen die Koeffizienten von U_1^2, $U_1 U_2$ und U_2^2 verschwinden. Also hat die Gleichung die Form:

$$a U_1 U_3 + b U_1 U_4 + c U_2 U_3 + d U_2 U_4 = 0.$$

2. $U_2 U_3 + k U_1 U_4 = 0.$

3. Man suche die Gleichungen: $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_4 = 0$, $U_3 = 0$ der vier Ebenen: $P_0 P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$, $P_2 P_3 P_0$, $P_3 P_0 P_1$. Es wird:

$$U_1 \equiv x + y - z, \quad U_2 \equiv x + y + z - 2a, \quad U_4 \equiv -x + y + z,$$
$$U_3 \equiv x - y + z.$$

Also die Gleichung der Fläche nach 2):

$$(x + y + z - 2a)(x - y + z) + k(x + y - z)(-x + y + z) = 0.$$

Sie soll durch den Schwerpunkt $\left(x = y = z = \frac{a}{2}\right)$ gehen. Durch Einsetzen daher: $k = +1$ und nach einigen Reduktionen:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)\left(z - \frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(y - \frac{a}{2}\right) = 0.$$

(Gleichseitiges, hyperbolisches Paraboloid.) Schwerpunkt zum Anfangspunkt gemacht, so $x_1 z_1 + \frac{a}{2} y_1 = 0$. Dann noch um y_1-Achse Drehung von 45^0, so: $x_2^2 - z_2^2 + a y_2 = 0$, 9), § 14.

4. $a U_1 U_2 + b U_1 U_3 + c U_1 U_4 + d U_2 U_3 + e U_2 U_4 + f U_3 U_4 = 0.$ (Beweis wie in Übungsaufgabe 1.)

§ 14.

1. Nach 20), da $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$ wird:

$$\frac{ab}{c} = \frac{bc}{a} = \frac{ca}{b}, \text{ daher: } a^2 = b^2 = c^2, \quad a = \pm b = \pm c,$$

d. h. Flächen, deren Gleichungen die Form haben:

$$\pm xy \pm yz \pm zx + dx + ey + f = 0$$

sind Umdrehungsflächen. [Vgl. Aufgabe c), § 4.]

2. Wählt man das Koordinatensystem und die Bezeichnungen so, wie in Aufgabe b), § 4, so werden die Gleichungen

$$\text{von } l_1: \; z - \varDelta = 0, \quad x \sin\varphi + y \cos\varphi = 0,$$
$$\text{von } l_2: \; z + \varDelta = 0, \quad x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0.$$

Daher nach Übungsaufgabe 1, § 13 die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung durch l_1 und l_2:

$$\alpha) \qquad a(z^2 - \varDelta^2) + b(x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi)$$
$$+ c(z + \varDelta)(x \sin\varphi + y \cos\varphi)$$
$$+ d(z - \varDelta)(x \sin\varphi - y \cos\varphi) = 0,$$

also:

$$a_{11} = b \sin^2\varphi, \qquad a_{22} = -b \cos^2\varphi, \quad a_{33} = a.$$
$$a_{23} = \frac{c - d}{2} \cos\varphi, \quad a_{31} = \frac{c + d}{2} \sin\varphi, \quad a_{12} = 0.$$

Die Fläche soll eine Umdrehungsfläche sein. Da $a_{12} = 0$, so tritt der S. 158 erwähnte Ausnahmefall ein und es muß entweder auch $a_{23} = 0$ oder auch $a_{31} = 0$ sein. Es sei:

$$a_{23} = 0,$$

so $c = d$ und 20 a) gibt:

$$(a_{11} - a_{22})(a_{33} - a_{22}) - a_{31}^2 = 0,$$

d. h:

$$b(a + b\cos^2\varphi) - c^2 \sin^2\varphi = 0; \quad a = \frac{c^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi}{b}.$$

Nach Einsetzen in α) und Multiplizieren mit b:

$$\beta) \quad (c^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi)(z^2 - \varDelta^2) + b^2(x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi)$$
$$+ 2bc(xz \sin\varphi + y\varDelta \cos\varphi) = 0,$$

also jetzt:

$$a_{11} = b^2 \sin^2\varphi, \quad a_{22} = -b^2 \cos^2\varphi, \quad a_{33} = c^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi,$$
$$a_{23} = 0, \qquad a_{31} = bc \sin\varphi, \qquad a_{12} = 0.$$

Daher nach 18) oder 18 a), wenn dort statt a, b, c (die hier schon gebraucht sind) A, B, C gesetzt werden, zunächst: $B = 0$, und dann:

$$b^2 \sin^2\varphi = \lambda + kA^2, \qquad -b^2 \cos^2\varphi = \lambda,$$
$$c^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi = \lambda + kC^2, \quad bc \sin\varphi = kAC,$$

hieraus:

$$\lambda = -b^2 \cos^2\varphi, \quad kA^2 = b^2, \quad kC^2 = c^2 \sin^2\varphi, \quad kAC = bc \sin\varphi.$$

Setzt man $k = 1$, so hiernach $A = b$, $C = c \sin\varphi$ (oder auch $A = -b$, $C = -c \sin\varphi$).

Die Gleichung der Fläche wird mithin nach 17):

$$\gamma) \quad -b^2 \cos^2\varphi\,(x^2 + y^2 + z^2) + (bx + cz\sin\varphi)^2 + 2\,bcy\Delta\cos\varphi - (c^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi)\Delta^2 = 0,$$

oder, wenn statt c gesetzt wird cb und man durch b^2 dividiert:

$$\delta) \quad -\cos^2\varphi\left[x^2 + \left(y - \frac{c\Delta}{\cos\varphi}\right)^2 + z^2\right] + (x + cz\sin\varphi)^2 + (1 + c^2)\Delta^2\cos^2\varphi = 0.$$

Der Mittelpunkt dieser durch l_1 und l_2 gehenden Umdrehungsfläche ist $M\left(0, \frac{c\Delta}{\cos\varphi}, 0\right)$. Die Richtungskosinus der Achse sind:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = A : B : C = 1 : 0 : c\sin\varphi.$$

Die Achse schneidet daher die y-Achse und steht auf ihr senkrecht. Es sei ξ, η, ζ ein beliebiger Punkt der Achse, so

$$1 : 0 : c\sin\varphi = \xi : \eta - \frac{c\Delta}{\cos\varphi} : \zeta,$$

folglich:

$$\eta = \frac{c\Delta}{\cos\varphi}, \quad \zeta = \xi c \sin\varphi.$$

Daher nach Elimination von c:

$$\varepsilon) \qquad \zeta = \frac{\xi\eta\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}.$$

Dies also ist die Gleichung für die Fläche aller Umdrehungsachsen (gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid). Sie ist dieselbe, wie in Aufgabe b), § 4 (selbstverständlich hat jeder Punkt einer Achse von l_1 und l_2 gleichen Abstand!).

Setzt man in δ) als besonderen Fall: $c = 0$, so folgt:

$$-\cos^2\varphi\,(x^2 + y^2 + z^2) + x^2 + \Delta^2\cos^2\varphi = 0.$$

Der Mittelpunkt wird $M(0, 0, 0)$ und die Umdrehungsachse fällt mit der x-Achse zusammen. Der Kehlkreis hat den kürzesten Abstand AA_1 (Fig. 8) zum Durchmesser. l_1 und l_2 vertauschen ihre Lage! (Vgl. S. 98.)

Macht man endlich den noch übrig bleibenden Ansatz $a_{13} = 0$, so wird $c = -d$. Statt der Gleichung δ) erhält man:

$$\delta') \quad -\sin^2\varphi\left[\left(x - \frac{c\Delta}{\sin\varphi}\right)^2 + y^2 + z^2\right] + (y + cz\cos\varphi)^2 + (1 + c^2)\Delta^2\sin^2\varphi = 0.$$

Die Umdrehungsachse schneidet die x-Achse senkrecht. Der geometrische Ort der Achsen ist aber dasselbe gleichseitige hyperbolische Paraboloid ε). Doch die Achsen selbst bilden die andere Schar der Erzeugenden (§ 12). Durch die Drehung wird stets ein und dieselbe Richtung von l_1 in ein und dieselbe Richtung von l_2 übergeführt, wenn $c = d$, und in die zu letzterer entgegengesetzte Richtung, wenn $c = -d$. Ist übrigens $\Delta = 0$, so schneiden sich l_1 und l_2. Die Flächen δ) und δ') werden zu Kreiskegeln, und das Paraboloid ε) artet in zwei Ebenen aus, nämlich die beiden Ebenen durch das im Schnittpunkt von l_1 und l_2 errichtete Lot und durch je eine der beiden Winkelhalbierenden. (Selbstverständlich!)

§ 15.

1. Gemeint ist selbstverständlich eine orthogonale Substitution. Es soll nach Ausführung derselben werden: $a'_{11} = a'_{22} = a'_{33} = 0$. Also auch $s' = a'_{11} + a'_{22} + a'_{33} = 0$. Nun ist s' eine Invariante, folglich ist die gesuchte Bedingung:

$$s = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0.$$

Ist diese erfüllt, so mache man den Ansatz $a'_{11} = 0$, $a'_{22} = 0$, der sofort auch die Gleichung $a'_{33} = 0$ nach sich zieht. Es bleiben daher nur zwei Bedingungen, und die Entfernung der rein quadratischen Glieder wird auf unendlich viele Weisen möglich.

Der Asymptotenkegel erhält nach der Transformation die Gleichung:

$$axy + byz + czx = 0.$$

Er geht mithin durch die x-, die y-, die z-Achse, d. h. er hat drei aufeinander senkrechte Kanten. Aus der Untersuchung geht hervor, daß er dann aus unzählig vielen solchen Tripeln zueinander senkrechter Kanten gebildet wird.

2. Es soll sein:

$$t = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{33}a_{11} - a_{13}^2) = 0.$$

Da t invariant ist, so hat das Nullsetzen zweier Klammerausdrücke auch das Nullwerden des dritten zur Folge. D. h. es ist auf unendlich viele Weisen möglich, durch Koordinatentransformation die drei Bedingungen zu erfüllen:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0, \quad a_{33}a_{11} - a_{13}^2 = 0.$$

Setzt man, nachdem dies geschehen, in die Gleichung des Asymptotenkegels:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$$

$z = 0$, so folgt die Gleichung:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0,$$

welche nun zwei einander gleiche Werte für $y:x$ liefert, d. h. die xy-Ebene berührt den Kegel. Dasselbe gilt von der yz-Ebene und der zx-Ebene. Dem Asymptotenkegel können also drei aufeinander senkrechte Ebenen umschrieben werden, und zwar auf unendlich viele Arten.

3. Da $a = \sqrt{\frac{-a'_{44}}{\lambda_1}}$, $b = \sqrt{\frac{-a'_{44}}{\lambda_2}}$, $c = \sqrt{\frac{-a'_{44}}{\lambda_3}}$, so folgt

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{-a'^3_{44}}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}.$$

Nun ist:

$$a'_{44} = \frac{D}{\varDelta}, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \varDelta,$$

daher:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \sqrt{\frac{(-D)^3}{\varDelta^2}}.$$

§ 16.

1. Zunächst muß $\varDelta = 0$ sein, da die Fläche ein Paraboloid ist. In der Normalform lautet ihre Gleichung nach 9), § 14, da $p = -q$:

$$z - \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p} = 0.$$

Also: $a_{11} = -\frac{1}{2p}$, $a_{22} = +\frac{1}{2p}$, $a_{33} = 0$, mithin auch: $a_{11} + a_{22} + a_{33} = s = 0$.

Folglich sind die beiden Bedingungen:

$$\varDelta = 0, \quad s = 0.$$

2. Nennt man das konstante Verhältnis k und benutzt dieselben Bezeichnungen wie in Aufgabe b), § 4, nur daß die dortige Größe $\varDelta$, um Verwechslungen zu vermeiden, jetzt d genannt wird, so erhält die Gleichung der Fläche die Gestalt:

a) $$[(z-d)^2 + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2]$$
$$- k^2[(z+d)^2 + (x\sin\varphi - y\cos\varphi)^2] = 0.$$

Also nach Einführung eines willkürlichen Faktors μ:

b) $a_{11} = \mu \sin^2 \varphi (1 - k^2), \quad a_{22} = \mu \cos^2 \varphi (1 - k^2),$
$a_{33} = \mu (1 - k^2), \qquad a_{23} = a_{31} = 0.$

$a_{12} = \mu \sin \varphi \cos \varphi (1 + k^2), \quad a_{14} = a_{24} = 0,$
$a_{34} = -\mu d (1 + k^2), \qquad a_{44} = \mu d^2 (1 - k^2).$

Man findet hieraus:

c) $s = 2 \mu (1 - k^2), \quad t = \mu^2 [(1 - k^2)^2 - 4 k^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi],$
$\varDelta = -4 \mu^3 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (1 - k^2) k^2.$

Die Berechnung der Determinante vierten Grades D vereinfacht sich hier, da $a_{23} = a_{31} = a_{14} = a_{24} = 0$, sehr erheblich; sie verwandelt sich in das Produkt zweier Determinanten zweiten Grades.

d) $D = (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)(a_{33} a_{44} - a_{34}^2) = + 16 \mu^4 k^4 d^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$

Nach den Kriterien des § 15 ist die Fläche im allgemeinen ein einschaliges Hyperboloid, da D positiv ist und s und $\varDelta$ ungleiche Vorzeichen haben. Wenn $d = 0$, d. h. wenn die beiden Geraden l und l_1 sich schneiden, so $D = 0$, d. h. die Fläche ist ein Kegel. Wenn $k = 1$, d. h. wenn die Abstände einander gleich sein sollen, so $s = 0$, $\varDelta = 0$, d. h. die Fläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Wenn $\varphi = 0$, oder $\varphi = 90^0$, d. h. wenn l und l_1 parallel sind, so $D = 0$, $\varDelta = 0$. Die Fläche wird zum Zylinder*), und zwar zu einem Kreiszylinder, da die kubische Gleichung für λ in diesem Falle wird:

$$\lambda^3 - 2 \lambda^2 \mu (1 - k^2) + \lambda \mu^2 (1 - k^2)^2 = 0,$$

welche die drei Wurzeln hat:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \mu (1 - k^2), \quad \lambda_3 = 0.$$

Setzt man aber endlich $k = 0$ oder auch $k = \infty$ $\left(\mu = \frac{1}{k^2}\right)$, so $D = 0$, $\varDelta = 0$, aber auch alle anderen Unterdeterminanten $= 0$. Die Fläche zerfällt in zwei imaginäre Ebenen, die sich in der Geraden l bzw. l_1 schneiden. Sie wird zum unendlich dünnen Zylinder.

*) Auch unmittelbar für $\sin \varphi = 0$ oder $\cos \varphi = 0$ aus der Gleichung a) zu entnehmen. Folgt auch aus dem der Elementargeometrie angehörenden Satz des Apollonius.

Von diesen Grenzfällen werde abgesehen. Die drei Gleichungen 2), § 15 für den Mittelpunkt werden hier:

$$\sin^2\varphi\,(1-k^2)\,\alpha + \sin\varphi\cos\varphi\,(1+k^2)\,\beta = 0,$$
$$\sin\varphi\cos\varphi\,(1+k^2)\,\alpha + \cos^2\varphi\,(1-k^2)\,\beta = 0,$$
$$(1-k^2)\,\gamma - d\,(1+k^2) = 0.$$

Der Mittelpunkt ist also:

$$M\left(0,\,0,\,d\,\frac{1+k^2}{1-k^2}\right).$$

Er liegt auf der z-Achse, d. h. der Linie des kürzesten Abstandes von l und l_1, aber außerhalb dieses Abstandes.

Die kubische Gleichung 13), § 15 wird:

$$\lambda^3 - 2\,\mu\,\lambda^2\,(1-k^2) + \mu^2\lambda\,[(1-k^2)^2 - 4\,k^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi]$$
$$+ 4\,\mu^3\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,(1-k^2)\,k^2.$$

oder:

$$\lambda\,[\lambda-\mu\,(1-k^2)]^2 - 4\,k^2\mu^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,[\lambda-\mu\,(1-k^2)] = 0.$$

Sie hat also eine Wurzel:

$$\lambda_3 = \mu\,(1-k^2),$$

während die beiden anderen durch Auflösung der quadratischen Gleichung entstehen:

$$\lambda^2 - \mu\,\lambda\,(1-k^2) - 4\,k^2\mu^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi = 0.$$

Für $\lambda = \lambda_3 = \mu\,(1-k^2)$ wird das System 10), § 15:

$$-\cos^2\varphi\,(1-k^2)\,\mathfrak{a}_3 + \sin\varphi\cos\varphi\,(1+k^2)\,\mathfrak{b}_3 = 0,$$
$$\sin\varphi\cos\varphi\,(1+k^2)\,\mathfrak{a}_3 - \sin^2\varphi\,(1+k^2)\,\mathfrak{b}_3 = 0,$$

während die letzte Gleichung identisch $0 = 0$ wird. Also $\mathfrak{a}_3 = 0$, $\mathfrak{b}_3 = 0$, d. h. die z-Achse ist die eine Hauptachse der Fläche. (Da λ_3 und Δ entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist sie eine der beiden reellen Achsen der Fläche.)

Dies war auch a priori aus der Form a) der Gleichung zu entnehmen, da das einzige in ihm enthaltene Produktglied $2\,a_{12}\,x\,y$ durch eine Drehung um die z-Achse fortgeschafft werden könnte.

3. Zunächst muß die Fläche nach **2.** ein einschaliges Hyperboloid sein (ausgenommen die dort erwähnten Grenzfälle). Da aber s, t, Δ und D von vier voneinander unabhängigen Größen μ, k, φ, d abhängen, so scheint keine Gleichung zwischen ihnen zu bestehen. Bei genauerem Zusehen findet man aber doch, daß aus den Ausdrücken c) für s, t und Δ die drei Größen μ, k und φ eliminiert werden können.

Man eliminiere zunächst φ aus t und Δ. Es folgt:

$$t\mu(1-k^2) = \mu^3(1-k^2)^3 + \Delta,$$

also:

$$\frac{ts}{2} = \frac{s^3}{8} + \Delta, \quad \text{oder:} \quad s^3 + 8\Delta - 4ts = 0.$$

Diese Bedingung muß also erfüllt sein.

Man kann sie aber auch folgendermaßen ableiten. Es war:

$$\lambda_3 = \mu(1-k^2),$$

also auch: $\lambda_3 = \frac{s}{2}\cdot$ Diesen Wert setze man in die kubische Gleichung:

$$\lambda^3 - \lambda^2 s + \lambda t - \Delta = 0$$

ein, so folgt wieder, wie vorhin: $s^3 + 8\Delta - 4ts = 0$.

Da ferner: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = s$, so hier: $\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{s}{2}$ und endlich:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3.$$

4. Die Fläche sei:

a) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

also: $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{b^2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{c^2}$. folglich:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}.$$

Die Gleichung a) soll aus der Gleichung a) in **2.** durch Verschiebung des Anfangspunktes in der Richtung der z-Achse und Drehung um dieselbe entstanden sein (nach Multiplikation mit einem Faktor μ). Man mache daher den Ansatz:

b) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = p_1^2[(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1)^2 + (z + d_1)^2] - p_2^2[(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2)^2 + (z + d_2)^2].$$

Die beiden eckigen Klammern sind die Quadrate der beiden Lote vom laufenden Punkte $P(xyz)$ auf die beiden Geraden mit den Gleichungen:

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 = 0, \quad z + d_1 = 0$$

und

$$x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 = 0, \quad z + d_2 = 0.$$

Also behauptet der Ansatz, daß diese beiden Lote ein konstantes Verhältnis $p_2 : p_1$ haben. Die Identität löst sich in die sechs Gleichungen auf:

$$\text{c)}\quad \frac{1}{a^2} = p_1^2 \cos^2 \alpha_1 - p_2^2 \cos^2 \alpha_2, \qquad \frac{1}{b^2} = p_1^2 \sin^2 \alpha_1 - p_2^2 \sin^2 \alpha_2,$$

$$\frac{1}{c^2} = p_1^2 - p_2^2.$$

$$-1 = p_1^2 d_1^2 - p_2^2 d_2^2. \quad 0 = p_1^2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 - p_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2.$$

$$0 = p_1^2 d_1 - p_2^2 d_2.$$

Die drei ersten Gleichungen sind nicht voneinander unabhängig, da aus ihnen die Folgerung gezogen werden kann:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2},$$

welche erfüllt ist. Es bleiben daher nur fünf Bedingungen zwischen den sechs Größen p_1, p_2, d_1, d_2, α_1, α_2, d. h. der Ansatz b) ist in der Tat auf unendlich viele Arten möglich. Es gibt unzählig viele Linienpaare, für welche das Verhältnis der Entfernungen konstant ist.

Um p_1, p_2, d_1, d_2, α_1, α_2 aus den Gleichungen c) darzustellen, muß man eine von ihnen, oder eine andere von ihnen abhängende Größe willkürlich annehmen. Es werde $p_1 : p_2 = \mu$, $p_1 = \mu p_2$ gesetzt, so folgt aus der dritten Gleichung:

$$p_1^2 = \frac{\mu^2}{c^2(\mu^2 - 1)}, \quad p_2^2 = \frac{1}{c^2(\mu^2 - 1)}.$$

Die sechste Gleichung gibt:

$$d_2 = \frac{p_1^2}{p_2^2} d_1 = \mu^2 d_1.$$

Man setze in die vierte Gleichung ein. Es wird:

$$d_1^2 = \frac{p_2^2}{p_1^2 (p_1^2 - p_2^2)},$$

folglich nach der dritten Gleichung:

$$d_1 = \frac{c}{\mu}, \quad d_2 = c\mu.$$

(μ kann sowohl positiv, wie negativ werden.)

Um die Winkel α_1 und α_2 zu berechnen, entwickele man aus der fünften Gleichung:

$$\sin \alpha_2 = \frac{p_1^2}{p_2^2} \cdot \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_2}.$$

setze in die zweite ein und berechne:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{p_1^2 \sin^2 \alpha_1 \,(p_2^2 \cos^2 \alpha_2 - p_1^2 \cos^2 \alpha_1)}{p_2^2 \cos^2 \alpha_2},$$

oder nach der ersten Gleichung:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{p_1^2 \sin^2 \alpha_1}{p_2^2 \cos^2 \alpha_2} = \mu^2 \frac{\sin^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der ersten und zweiten Gleichung c) folgt dann leicht:

$$\cos \alpha_1 = \frac{b \sqrt{\mu^2 b^2 - a^2}}{\mu \sqrt{b^4 - a^4}}, \quad \cos \alpha_2 = \frac{b \sqrt{b^2 - \mu^2 a^2}}{\sqrt{b^4 - a^4}},$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{a \sqrt{b^2 - \mu^2 a^2}}{\mu \sqrt{b^4 - a^4}}, \quad \sin \alpha_2 = \frac{a \sqrt{\mu^2 b^2 - a^2}}{\sqrt{b^4 - a^4}}.$$

Damit das Linienpaar reell wird, muß daher (da $b > a$) das Verhältnis μ zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ liegen. Innerhalb dieser Grenzen ist aber μ ganz willkürlich. Vertauscht man μ mit $\frac{1}{\mu}$, so werden offenbar die beiden Linien des zugehörigen Paares vertauscht. ($\mu = 1$ ausgeschlossen, weshalb?)

§ 17.

1. Es sei:

$$mx + ny + pz = 0$$

die Gleichung irgend einer Durchmesserebene. Die Richtungskosinus der Normalen verhalten sich nach 6a), § 7 wie $m : n : p$. Es sei $P(\xi, \eta, \zeta)$ irgend ein Punkt auf ihr, so verhalten sich die Richtungskosinus andererseits wie $\xi : \eta : \zeta$. Daher:

$$\xi : \eta : \zeta = m : n : p.$$

Soll $r = MP$ wie verlangt $= a'$ (bzw. $= b'$) sein, so:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = + a'^2 (= + b'^2).$$

Andererseits nach 16): $\lambda = - a'^2 (= - b'^2)$, also auch:

$$\lambda = - r^2.$$

Die Gleichung 15) ergibt daher:

$$\frac{\xi^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{\eta^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{\zeta^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

Dies ist, wenn man für r^2 seinen Wert $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ einsetzt, die Gleichung der Wellenfläche. Sie ist nach Fortschaffung

der Nenner nur scheinbar vom sechsten Grade, da in ihr der überflüssige Faktor r^2 enthalten ist. Derselbe kann eliminiert werden, wenn man so umformt:

$$\frac{\xi^2 a^2}{r^2 - a^2} = -\xi^2 + \frac{r^2 \xi^2}{r^2 - a^2} \text{ usw.}$$

Es folgt nach Division durch r^2:

$$\alpha) \qquad \frac{\xi^2}{r^2 - a^2} + \frac{\eta^2}{r^2 - b^2} + \frac{\zeta^2}{r^2 - c^2} - 1 = 0$$

oder:

$$\alpha') \qquad \xi^2 (r^2 - b^2)(r^2 - c^2) + \eta^2 (r^2 - c^2)(r^2 - a^2) + \zeta^2 (r^2 - a^2)(r^2 - b^2) - (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)(r^2 - c^2) = 0.$$

Die Fläche besteht (den Werten $r = a'$ und $r = b'$ entsprechend) aus zwei Teilen, einer inneren und einer äußeren Fläche, die nur in vier Punkten [den Kreispunkten $(a' = b')$ entsprechend] einander berühren. Bildet man den Schnitt mit einer Hauptebene, setzt also z. B. in α') $\zeta = 0$, so folgt:

$$(r^2 - c^2)\left[\xi^2 (r^2 - b^2) + \eta^2 (r^2 - a^2) - (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)\right] = 0,$$

also, da $r^2 = \xi^2 + \eta^2$, entweder:

$$\xi^2 + \eta^2 = c^2,$$

d. h. ein Kreis mit dem Radius c, oder, nach kleiner Umformung:

$$\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2} - 1 = 0,$$

d. h. eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, aber gegen den zugehörigen Hauptschnitt des Ellipsoids, wie man sieht, um 90° gedreht.

Dies Zerfallen der Schnitte mit den Hauptebenen in einen Kreis und eine Ellipse ist geometrisch sofort erklärt, da eine durch eine Hauptachse gehende Durchmesserebene das Ellipsoid in einer Ellipse schneidet, deren eine Hauptachse mit dieser Hauptachse zusammenfällt, während die andere in der senkrechten Hauptebene liegt.

2. Es seien, wie im Text:

$$kx + lz + h = 0, \quad kx - lz + h_1 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen der beiden Kreisschnitte, so ist, wie dort gezeigt, die Gleichung der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 + xkb^2(h + h_1) + zlb^2(h - h_1) + b^2(hh_1 - 1) = 0.$$

Daher ihr Mittelpunkt $M(\alpha, 0, \gamma)$ und ihr Radius r nach 5), § 13:

$$\text{a)} \qquad \alpha = -\frac{kb^2(h + h_1)}{2}, \quad \gamma = -\frac{lb^2(h - h_1)}{2}.$$

$$r = b\sqrt{1 - hh_1 + \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{b^2}}.$$

Will man hieraus h und h_1 eliminieren, so bilde man zunächst die Kombination:

$$\frac{\alpha^2}{k^2b^4} - \frac{\gamma^2}{l^2b^4} = hh_1.$$

Daher:

$$\frac{r^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{k^2b^4} + \frac{\gamma^2}{l^2c^4} + \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{b^2},$$

oder nach Einsetzen von 5) und leichter Reduktion:

$$\text{b)} \qquad \frac{r^2}{b^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{b^2 - c^2}.$$

Dies ist die gesuchte Beziehung zwischen α, γ und r. Sind α und γ reell, so sind nach a) auch h und h_1, also auch die Ebenen der Kreisschnitte reell. Die Schnitte selbst aber können sehr wohl imaginär werden, wenn nämlich die Ebenen das Ellipsoid nicht schneiden. Dies trifft im besonderen sicherlich zu, wenn $r = 0$. Die Gleichung b) gibt dann:

$$\text{c)} \qquad \frac{\alpha^2}{a^2 - b^2} - \frac{\gamma^2}{b^2 - c^2} - 1 = 0.$$

Dies ist die sogenannte Fokalhyperbel des Ellipsoids, welche wir später auf ganz anderem Wege in § 20 wiederfinden werden*).

*) Diese Ableitung der Fokalkurven ist die erste, welche man überhaupt (durch Verallgemeinerung der Brennpunkte von der Ellipse auf das Ellipsoid) gefunden hat. Wie in I, § 14, S. 180 gezeigt, sind die Tangenten von einem Brennpunkt an die Ellipse „Nullinien". Oder auch: Der Kreis um einen Brennpunkt als Mittelpunkt mit dem Radius Null hat mit der Ellipse eine doppelte Berührung. Eine Kugel nun, welche das Ellipsoid in zwei Kreisen schneidet, hat aber mit dem Ellipsoid auch eine doppelte Berührung (in den beiden Punkten nämlich, in welchen die beiden Kreise sich schneiden). Also, so schloß man, suche man unter allen diesen Kugeln diejenigen auf, deren Radien $= 0$ sind. Die Mittelpunkte dieser Kugeln werden dann voraussichtlich in vielen Beziehungen den Brennpunkten der Ellipse entsprechen.

§ 18.

1. Die Gleichung der Tangentialebene in $P(xyz)$ ist:

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0.$$

Das Verhältnis der Richtungskosinus der Normalen mithin $= \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2}$. Wenn daher $P'(\xi, \eta, \zeta)$ ein beliebiger Punkt der Normalen, so:

$$\xi - x : \eta - y : \zeta - z = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2} : \frac{z}{c^2},$$

also nach Einführung eines Faktors λ:

a) $\xi = x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right), \quad \eta = y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right), \quad \zeta = z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right).$

Für Q, R, S ist der Reihe nach zu setzen: $\lambda = -a^2$, $\lambda = -b^2$, $\lambda = -c^2$.

Daher:

$$Q\left(0,\ y\frac{b^2 - a^2}{b^2},\ z\frac{c^2 - a^2}{c^2}\right), \quad R\left(x\frac{a^2 - b^2}{a^2},\ 0,\ z\frac{c^2 - b^2}{c^2}\right),$$

$$S\left(x\frac{a^2 - c^2}{a^2},\ y\frac{b^2 - c^2}{b^2},\ 0\right)$$

und

$$PQ : PR : PS = \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = a^2 : b^2 : c^2.$$

(Vgl. I, § 14.)

2. Die Bedingung des Senkrechtstehens: $XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0$ verwandelt sich nach 21) in:

a) $$a^2 XL + b^2 YM + c^2 ZN = 0.$$

Sie wird z. B. für alle Durchmesser erfüllt ($L = M = N = 0$) (Polaren unendlich fern, also von unbestimmter Richtung), für alle in einer Hauptebene liegende Gerade, z. B. $X = 0$, $M = 0$, $N = 0$, für alle zu einer Hauptebene senkrechte Gerade, z. B. $L = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ und auch für alle Normalen, weil die zugehörigen Polaren in den Tangentialebenen liegen.

3. Die Komplexgleichung a) der vorigen Aufgabe bleibt unverändert, wenn $a : b : c$ unverändert bleibt, also für alle ähnlichen, ähnlich gelegenen und konzentrischen Ellipsoide.

Vermöge der Identität $XL + YM + ZN = 0$ kann sie aber auch so geschrieben werden:

$$(a^2 + \lambda) XL + (b^2 + \lambda) YM + (c^2 + \lambda) ZN = 0,$$

d. h. die Komplexgleichung bleibt auch für alle konfokalen Flächen dieselbe. Setzt man z. B. $\lambda = -a^2$, so:

$$(b^2 - a^2) YM + (c^2 - a^2) ZN = 0,$$

d. h. der Komplex bleibt derselbe, wenn $b^2 - a^2 : c^2 - a^2$ sich nicht ändert (§ 20).

Die drei Punkte Q, R, S, in denen die Koordinatenebenen geschnitten werden, sind nach 9), § 10, wenn dort der Reihe nach $x, y, z = 0$ gesetzt wird:

$$Q\left(0, -\frac{N}{X}, \frac{M}{X}\right), \quad R\left(\frac{N}{Y}, 0, -\frac{L}{Y}\right), \quad S\left(-\frac{M}{Z}, \frac{L}{Z}, 0\right).$$

Man findet hiernach z. B.:

$$\frac{QR}{QS} = \frac{NZ}{MY} = \frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2},$$

also konstant. D. h. der Komplex besteht aus allen Geraden, welche die Koordinatenebenen in drei Punkten so schneiden, daß das einfache Verhältnis zwischen denselben einen gegebenen Wert hat. (Vgl. Übungsaufgaben 3 und 4, § 9.)

4. Die Normale in $P(xyz)$ geht durch den in **1.** bezeichneten Punkt $P'(\xi\eta\zeta)$. Ihre Plückerschen Koordinaten daher nach § 10:

$$\text{a)} \quad X = \frac{\lambda x}{a^2}, \quad Y = \frac{\lambda y}{b^2}, \quad Z = \frac{\lambda z}{c^2}, \quad L = \lambda yz\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right),$$

$$M = \lambda zx\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right), \quad N = \lambda xy\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right).$$

Hieraus und der Gleichung für P:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

sind x, y, z, λ zu eliminieren. Man findet zunächst sofort die Identität: $XL + YM + ZN = 0$ bestätigt, dann aber wieder die Gleichung:

$$a^2 XL + b^2 YM + c^2 ZN = 0$$

und schließlich noch die tiefer liegende Gleichung dritten Grades:

$$XMNa^2(b^2-c^2)+YNLb^2(c^2-a^2)+ZLMc^2(a^2-b^2)$$
$$-XYZ(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)=0.$$

Fragt man z. B. nach allen Normalen des Ellipsoids von einem beliebig gegebenen Punkt $P_0(x_0y_0z_0)$, so setze man: $L=y_0Z-z_0Y$ usw. und erhält um P_0 als Spitze einen Kegel zweiten und einen Kegel dritten Grades. Also gehen durch P_0 sechs Normalen (welche selbstverständlich nicht alle reell zu sein brauchen, da z. B., wenn P_0 außerhalb des Ellipsoids liegt, offenbar nur zwei reelle Normalen vorhanden sein werden). Ebenso zeigt man, daß in einer beliebigen Ebene auch (höchstens) sechs Normalen liegen.

§ 19.

1. Aus 4) und 5) werden durch Auflösung nach xyz diese drei Koordinaten, wie 6) im besonderen Falle zeigt, „bilineare" Funktionen von λ und μ mit demselben Nenner:

$$\alpha) \qquad x=\frac{a_1+b_1\lambda+c_1\mu+d_1\lambda\mu}{a_4+b_4\lambda+c_4\mu+d_4\lambda\mu} \text{ usw.}$$

Die vier Ecken seien:

$$\beta) \quad A(x_0y_0z_0),\quad B(x_1y_1z_1),\quad C(x_2y_2z_2),\quad D(x_3y_3z_3).$$

Es sind AB und CD zwei Gerade der einen Schar, denen je ein konstanter Wert von λ, nämlich $\lambda=\lambda_0$, $\lambda=\lambda_1$ entsprechen möge. DA und BC gehören zur anderen Schar und ihnen mögen die Werte $\mu=\mu_0$, $\mu=\mu_1$ entsprechen. Dann sind die vier Punkte, in den λ und μ ausgedrückt:

$$\gamma) \quad A(\lambda_0,\mu_0),\quad B(\lambda_0,\mu_1),\quad C(\lambda_1,\mu_1),\quad D(\lambda_1,\mu_0).$$

Man kann nun unbeschadet der Allgemeinheit annehmen: $\lambda_0=\mu_0=0$ und $\lambda_1=\mu_1=\infty$ $\left(\text{d. h. } \frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{\mu_1}=0\right)$. Denn die Form α) ändert sich nicht, wenn die λ und μ linear transformiert werden, d. h. wenn an ihre Stelle gesetzt wird:

$$\frac{\alpha+\beta\lambda}{\gamma+\delta\lambda},\quad \frac{\alpha'+\beta'\mu}{\gamma'+\delta'\mu}$$

und hat nun die Möglichkeit, daß den alten Werten λ_0 und λ_1 nachher die Werte 0 und ∞ usw. entsprechen. Es sei also:

$$\lambda_0 = 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \lambda_1 = \infty, \quad \mu_1 = \infty,$$

so folgt durch Einsetzen des Punktes A in α) nach β) und γ):

$$x_0 = \frac{a_1}{a_4}, \quad a_1 = a_4 x_0 \text{ usw.,}$$

also:

$$x = \frac{a_4 x_0 + b_4 x_3 \lambda + c_4 x_1 \mu + d_4 x_2 \lambda \mu}{a_4 + b_4 \lambda + c_4 \mu + d_4 \lambda \mu}.$$

y und z entstehen aus dieser Darstellung, wenn auch rechts x durch y und z ersetzt wird. Die vier Koeffizienten a_4, b_4, c_4, d_4 bleiben ganz willkürlich. (Ist aber etwa einer von ihnen $= 0$, so artet die Fläche, wie leicht ersichtlich, in zwei Ebenen des Tetraeders $ABCD$ aus.) Da es aber nur auf ihre Verhältnisse ankommt, so setze man z. B. $a_4 = 1$. Dann schreibe man λ für $b_4 \lambda$, μ für $c_4 \mu$, so bleibt nur noch d_4 willkürlich. Läßt man nunmehr hier den Index 4 fort, so folgt:

$$x = \frac{x_0 + x_3 \lambda + x_1 \mu + d x_2 \lambda \mu}{1 + \lambda + \mu + d \lambda \mu},$$

ebenso y und z. Variiert man hier d, so entstehen Parameterdarstellungen für jede Fläche des durch das windschiefe Viereck bestimmten „Büschels" von Flächen zweiter Ordnung.

Soll die zu bestimmende Fläche ein Paraboloid werden, so muß eine der Linien λ und eine der Linien μ unendlich fern liegen. D. h. der Nenner muß ein Produkt werden aus einem Faktor ersten Grades, der nur λ und einem solchen, der nur μ enthält. Dies wird nur erreicht, wenn $d = 1$, denn es ist:

$$1 + \lambda + \mu + d \lambda \mu = (1 + \lambda)(1 + \mu) + (d - 1) \lambda \mu.$$

Für das Paraboloid erhält man also die Darstellung:

$$x = \frac{x_0 + x_3 \lambda + x_1 \mu + x_2 \lambda \mu}{1 + \lambda + \mu + \lambda \mu} = \frac{x_0 + x_3 \lambda + x_1 \mu + x_2 \lambda \mu}{(1 + \lambda)(1 + \mu)} \text{ usw.}$$

Setzt man hier im besonderen $\lambda = \mu = +1$, so folgt:

$$x = \frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4} \text{ usw.,}$$

d. h. das Paraboloid geht durch den Schwerpunkt des Tetraeders $ABCD$. (Vgl. Übungsaufgabe 3, § 13.)

Für das Paraboloid geht die Projektivität (S. 211) in Ähnlichkeit über. Man teile also AB und DC in eine gleiche Anzahl gleicher Teile und verbinde entsprechende Teilpunkte [wenn aber AB und DC nicht windschief wären, sondern sich schneiden würden, so Tangentenkonstruktion der Parabel (I, § 23)]. Im besonderen liegt die durch den Schwerpunkt des Tetraeders gehende Verbindungslinie der Mitten von AB und DC auf der Fläche.

2. Aus:

$UV_1 - VU_1 = 0$ und: $UV_1 - VU_1 + aU^2 + bUV + cV^2 = 0$

folgt:

$$\alpha)\ UV_1 - VU_1 = 0, \qquad \beta)\ aU^2 + bUV + cV^2 = 0.$$

$\beta)$ zerfällt in zwei Gleichungen ersten Grades:

$$\beta_1)\ U - \lambda_1 V = 0, \qquad \beta_2)\ U - \lambda_2 V = 0.$$

Also nach Einsetzen von $\beta_1)$ in $\alpha)$

entweder: $U = V = 0$ oder $U_1 - \lambda_1 V_1 = 0$

und nach Einsetzen von $\beta_2)$

entweder: $U = V = 0$ oder $U_1 - \lambda_2 V_1 = 0$.

Die Gerade ($U = 0$, $V = 0$) wird also zweimal als Schnittlinie der beiden Flächen erhalten (welche sich außerdem noch in den beiden Geraden:

$U - \lambda_1 V = 0$, $U_1 - \lambda_1 V_1 = 0$; $U - \lambda_2 V = 0$, $U_1 - \lambda_2 V_1 = 0$

schneiden), d. h. diese Gerade ist eine Doppellinie des Schnittes beider Flächen, d. h. letztere berühren sich längs derselben in ihrer ganzen Ausdehnung.

3. Die Gleichung einer Umdrehungsfläche zweiter Ordnung überhaupt hat nach 16a), § 14, wenn man dort $\lambda = 1$ und $k = -1$ setzt, was, wenn a, b, c beliebig sind, gestattet ist, die Form:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ax + by + cz)^2 + 2dx + 2ey + 2fz + g = 0.$$

Macht man die Berührungslinie zur x-Achse, d. h. nimmt man $y = 0$, $z = 0$ als ihre Gleichungen, so folgt durch Einsetzen für jeden Wert von x:

$$x^2(1 - a^2) + 2dx + g = 0,$$

also: $d = 0$, $g = 0$, $a = \pm 1$. Da aber die Vorzeichen von a, b, c gewechselt werden dürfen, so setze man: $a = +1$.

Nunmehr seien:

$$\text{I)} \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + ay + bz)^2 + 2cy + 2dz = 0,$$
$$\text{II)} \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + a_1 y + b_1 z)^2 + 2c_1 y + 2d_1 z = 0$$

die Gleichungen der beiden in der Aufgabe genannten Hyperboloide, welche sich längs der x-Achse in ihrer ganzen Ausdehnung berühren sollen. Nach der vorigen Aufgabe muß also zwischen den linken Seiten U und U_1 eine Identität von der Form:

$$kU - U_1 - \alpha y^2 - 2\beta yz - \gamma z^2 = 0$$

vorhanden sein. Dieselbe zerfällt in die folgenden sieben Gleichungen, wenn man die Koeffizienten von y^2, z^2, yz, zx, xy, y, $z = 0$ setzt:

$$k(1 - a^2) - (1 - a_1^2) - \alpha = 0; \quad k(1 - b^2) - (1 - b_1^2) - \gamma = 0;$$
$$-kab + a_1 b_1 - \beta = 0;$$
$$-kb + b_1 = 0; \quad -ka + a_1 = 0; \quad kc - c_1 = 0; \quad kd - d_1 = 0.$$

Folglich sind:

$$\text{I}') \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + ay + bz)^2 + 2cy + 2dz = 0,$$
$$\text{II}') \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + kay + kbz)^2 + 2kcy + 2kdz = 0,$$

wo a, b, c, d, k ganz beliebig sind, irgend zwei Umdrehungshyperboloide, welche sich längs der x-Achse überall berühren.

Die Gleichungen I′) und II′) lassen sich aber noch vereinfachen. Dreht man das Koordinatensystem um die x-Achse, so können $ay + bz$ zu einem einzigen Glied zusammengezogen werden. Man kann also unbeschadet der Allgemeinheit b (oder a) $= 0$ setzen. Verschiebt man darauf noch in der Richtung der x-Achse, so ändert sich nur c und man kann c zu 0 machen. Die Gleichungen werden dann:

$$\text{I}'') \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + ay)^2 + 2dz = 0,$$
$$\text{II}'') \quad x^2 + y^2 + z^2 - (x + kay)^2 + 2kdz = 0.$$

Aus der Form dieser Gleichungen geht noch hervor, daß die Gleichungen der Umdrehungsachsen l und l_1 werden:

$$\alpha) \quad l: z + d = 0, \quad y - ax = 0, \quad l_1: z + d_1 = 0, \quad y - a_1 x = 0,$$

wo nach I″) und II″):

$$d : d_1 = a : a_1,$$

während die Gleichungen der Berührenden l_2 sind:

$$\beta) \quad l_2: y = 0, \quad z = 0.$$

Hieraus geht hervor:

1. Diejenige Gerade, welche l und l_1 senkrecht schneidet (hier also die z-Achse), schneidet auch die Berührende l_2 senkrecht.

2. l_2 ist Erzeugende eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, in welchem l und l_1 zwei Erzeugende sind. Die Gleichung desselben ist:

$$azx - dy = 0.$$

Sind aber, wie vorausgesetzt, l und l_1 gegeben, während l_2 gesucht wird, und nimmt man die Gleichungen von l und l_1 in der Form an (Aufgabe b, § 4):

$$\alpha')\qquad l: z - \Delta = 0, \quad x \sin\varphi + y\cos\varphi = 0;$$
$$l_1: z + \Delta = 0, \quad x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

so ist das jetzt gewählte Koordinatensystem offenbar gegen das vorige um die z-Achse gedreht und in der Richtung der z-Achse verschoben. Die Gleichungen von l_2 werden daher nicht mehr $y = 0$, $z = 0$, sondern von der Form sein:

$$\beta')\qquad l_2: z - \Delta' = 0, \quad x\sin\varphi' + y\cos\varphi' = 0.$$

Setzt man daher, um α') und β') mit α) und β) in Einklang zu bringen:

$$z = \Delta' + z', \quad x\sin\varphi' + y\cos\varphi' = y',$$

also auch:

$$x\cos\varphi' - y\sin\varphi' = x', \quad x = x'\cos\varphi' + y'\sin\varphi',$$
$$y = -x'\sin\varphi' + y'\cos\varphi',$$

so verwandeln sich die Gleichungen α') und β') in:

$$\alpha'')\quad l: z' + \Delta' - \Delta = 0, \quad y' - x'\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) = 0;$$
$$l_1: z' + \Delta' + \Delta = 0, \quad y' - x'\operatorname{tg}(\varphi' + \varphi) = 0.$$
$$\beta'')\qquad l_2: z' = 0, \quad y' = 0.$$

α'') und β'') müssen also jetzt mit α) und β) identisch sein, außer daß einmal x', y', z', ein andermal x, y, z steht. Folglich:

$$d = \Delta' - \Delta, \quad d_1 = \Delta' + \Delta, \quad a = -\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi),$$
$$a_1 = -\operatorname{tg}(\varphi' + \varphi),$$

also, da $ad_1 - a_1 d = 0$:

$$(\Delta' + \Delta)\cdot\operatorname{tg}(\varphi' - \varphi) - (\Delta' - \Delta)\cdot\operatorname{tg}(\varphi' + \varphi) = 0,$$

oder vereinfacht:

$$\gamma)\qquad \frac{\Delta'}{\sin 2\varphi'} = \frac{\Delta}{\sin 2\varphi}.$$

Dies ist die einzige Beziehung zwischen Δ, φ, Δ' und φ'. Sind l und l_1, also auch Δ und φ gegeben, so gibt es hiernach unzählig viele Hyperboloide, welche der verlangten Aufgabe genügen. Setzt man z. B. $\varphi' = 0$ (oder $\varphi' = 90^\circ$), so wird $\Delta' = 0$. Nach β') fällt l_2 mit der x-Achse (oder y-Achse) zusammen und die beiden Hyperboloide werden kongruent. Man wird diesen Fall wählen, wenn die Tourenzahl dieselbe bleiben soll, also das Übersetzungsverhältnis 1 : 1 ist. Hat dieses Verhältnis aber einen anderen Wert, so wird man das Verhältnis der Radien der beiden Kehlkreise, nämlich $\Delta' - \Delta : \Delta' + \Delta$ hiernach richten.

§ 20.

1. α)
$$\begin{aligned} MP_1^2 - MP^2 &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x^2 + y^2 + z^2) \\ &= x^2 \frac{a_1^2 - a^2}{a^2} + y^2 \frac{b_1^2 - b^2}{b^2} + z^2 \frac{c_1^2 - c^2}{c^2} \\ &= \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \lambda. \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} (PP'_1)^2 - (P'P_1)^2 &= [(x'_1 - x)^2 + (y'_1 - y)^2 + (z'_1 - z)^2] \\ &\quad - [(x_1 - x')^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2] \\ &= [(x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1) - (x'^2 + y'^2 + z'^2)] \\ &\quad - [(x^2_1 + y^2_1 + z^2_1) - (x^2 + y^2 + z^2)] \\ &\quad - 2[xx'_1 - x_1 x'] - 2[yy'_1 - y_1 y'] \\ &\quad - 2[zz'_1 - z_1 z'] = 0. \end{aligned}$$

Es sind die beiden ersten Klammerausdrücke nach α) jeder $= \lambda$, die drei anderen jeder $= 0$. Von dem Korrespondenzprinzip hat man z. B. auf sehr scharfsinnige Weise vorzügliche Anwendungen auf die Erforschung von Anziehungen gemacht, welche von ellipsoidisch begrenzten Körpern ausgehen.

2. Der Pol $P(x, y, z)$ der Ebene $E(u, v, w)$ in bezug auf die Fläche:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

ist nach 20), § 18:

$$x = -u(a^2 + \lambda), \quad y = -v(b^2 + \lambda), \quad z = -w(c^2 + \lambda).$$

x, y, z sind also lineare Funktionen von λ, folglich liegen die Pole einer gegebenen Ebene E in bezug auf alle konfokalen

Flächen in einer geraden Linie. Seien λ_1 und λ_2 die Parameter zweier Flächen, $P_1(x_1 y_1 z_1)$, $P_2(x_2 y_2 z_2)$ die zugehörigen Pole, α, β, γ die Richtungswinkel ihrer Verbindungslinie, so:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x_2 - x_1 : y_2 - y_1 : z_2 - z_1$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)\,u : (\lambda_1 - \lambda_2)\,v : (\lambda_1 - \lambda_2)\,w = u : v : w.$$

Nach 11), § 7 steht diese Gerade daher auf E senkrecht.

3. a) Es sei $l(X, Y, Z, L, M, N)$ irgend eine Gerade im Raum und λ (bzw. μ oder ν) der Parameter irgend einer der konfokalen Flächen. Nach 18), § 18 berührt l die Fläche, wenn:

$$\frac{X^2}{a^2+\lambda} + \frac{Y^2}{b^2+\lambda} + \frac{Z^2}{c^2+\lambda} + \frac{L^2}{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$
$$+ \frac{M^2}{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)} + \frac{N^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} = 0.$$

Dies gibt nach Fortschaffung der Nenner eine Gleichung zweiten Grades für λ. Die Gerade l berührt also zwei der konfokalen Flächen.

b) Um die anderen Behauptungen zu beweisen, ist es zweckmäßig, von folgender Betrachtung auszugehen. Es seien $E_1(u_1 v_1 w_1)$ und $E_2(u_2 v_2 w_2)$ irgend zwei durch l gehende Ebenen. Dieselben sind im allgemeinen nur in bezug auf eine der konfokalen Flächen zueinander polar. Denn die zugehörige Bedingungsgleichung:

$$\alpha)\quad u_1 u_2 (a^2+\lambda) + v_1 v_2 (b^2+\lambda) + w_1 w_2 (c^2+\lambda) - 1 = 0$$

liefert nur einen Wert für λ. Wenn aber:

$$\beta)\qquad u_1 u_2 + v_1 v_2 + w_1 w_2 = 0$$

und zugleich:

$$\gamma)\qquad u_1 u_2 a^2 + v_1 v_2 b^2 + w_1 w_2 c^2 - 1 = 0,$$

so wird diese Gleichung identisch erfüllt und die Ebenen sind polar in bezug auf alle Flächen.

Nun bilden sämtliche durch eine Gerade l gehende Ebenen ein auf sich selbst polar und also auch involutorisch bezogenes Ebenenbüschel, wenn man jeder durch l gehenden Ebene E_1 die ihr in bezug auf irgend eine Fläche polare und durch l

gehende Ebene E_2 zuordnet. Bei dieser paarweisen Zuordnung gibt es aber stets ein reelles Paar, welches einen rechten Winkel bildet. D. h. durch jede Gerade l im Raume gibt es zwei Ebenen, für welche β) und γ) erfüllt sind. Diese Ebenen sind sich dann in bezug auf alle Flächen polar und halbieren also (da sie senkrecht stehen) die Winkel zwischen den beiden Tangentialebenen an jede der Flächen.

c) Um nun zu beweisen, daß diese Ebenen E_1 und E_2 mit den beiden Berührungsebenen in den Berührungspunkten von l mit den beiden in a) bestimmten Flächen zusammenfallen, betrachte man eine beliebige durch l gehende Ebene $E(u, v, w)$, so daß:

$$u = \frac{u_1 + k u_2}{1 + k}, \quad v = \frac{v_1 + k v_2}{1 + k}, \quad w = \frac{w_1 + k w_2}{1 + k}.$$

Sie berührt die Fläche mit dem Parameter λ in einem Punkt $P(xyz)$, wenn:

$$x = -u(a^2 + \lambda), \quad y = -v(b^2 + \lambda), \quad z = -c(b^2 + \lambda).$$

Soll P, wie verlangt, auf l liegen, so muß sein:

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0, \quad u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0,$$

also, nach Einsetzen von x, u usw. und Multiplikation mit $-(1 + k)$:

$$\begin{aligned}&[u_1^2(a^2 + \lambda) + v_1^2(b^2 + \lambda) + w_1^2(c^2 + \lambda) - 1]\\ &+ k[u_1 u_2(a^2 + \lambda) + v_1 v_2(b^2 + \lambda) + w_1 w_2(c^2 + \lambda) - 1] = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[u_1 u_2(a^2 + \lambda) + v_1 v_2(b^2 + \lambda) + w_1 w_2(c^2 + \lambda) - 1]\\ &+ k[u_2^2(a^2 + \lambda) + v_2^2(b^2 + \lambda) + w_2^2(c^2 + \lambda) - 1] = 0.\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen zur Bestimmung von k und λ geben aber nach β) und γ) entweder $k = 0$, oder $k = \infty$, d. h. E fällt entweder mit E_1 oder mit E_2 zusammen.

§ 21.

1. Das Korrespondenzprinzip gilt selbstverständlich nicht allein für zwei konfokale Ellipsoide, sondern auch für irgend zwei konfokale Flächen derselben Schar, also auch z. B. für zwei einschalige Hyperboloide mit den Parametern μ_1 und μ_2. Auf dem ersten werden zwei Punkte $P_1(x_1 y_1 z_1)$ und $P_2(x_2 y_2 z_2)$

angenommen. Die korrespondierenden Punkte des zweiten seien $Q_1(x'_1 y'_1 z'_1)$ und $Q_2(x'_2 y'_2 z'_2)$. Dann ist:

$$\alpha)\quad \frac{x_1}{\sqrt{a^2+\mu_1}} = \frac{x'_1}{\sqrt{a^2+\mu_2}},\quad \frac{y_1}{\sqrt{b^2+\mu_1}} = \frac{y'_1}{\sqrt{b^2+\mu_2}},$$

$$\frac{z_1}{\sqrt{-(c^2+\mu_1)}} = \frac{z'_1}{\sqrt{-(c^2+\mu_2)}}.$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{a^2+\mu_1}} = \frac{x'_2}{\sqrt{a^2+\mu_2}},\quad \frac{y_2}{\sqrt{b^2+\mu_1}} = \frac{y'_2}{\sqrt{b^2+\mu_2}},$$

$$\frac{z_2}{\sqrt{-(c^2+\mu_1)}} = \frac{z'_2}{\sqrt{-(c^2+\mu_2)}}$$

und $\beta)$ $P_1 Q_2 = Q_1 P_2$.

Jetzt setze man $z_1 = 0$ und $y_2 = 0$, d. h. man nehme P_1 in der xy-Ebene und P_2 in der xz-Ebene, so folgt aus $\alpha)$ auch $z'_1 = 0$, $y'_2 = 0$, d. h. auch P'_1 liegt in der xy-Ebene und P'_2 in der xz-Ebene. Dann bleibt $\beta)$ bestehen und $\alpha)$ wird:

$$\alpha')\quad \frac{x_1}{\sqrt{a^2+\mu_1}} = \frac{x'_1}{\sqrt{a^2+\mu_2}},\quad \frac{y_1}{\sqrt{b^2+\mu_1}} = \frac{y'_1}{\sqrt{b^2+\mu_2}},$$

$$z_1 = z'_1 = 0,$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{a^2+\mu_1}} = \frac{x'_2}{\sqrt{a^2+\mu_2}},\quad y_2 = y'_2 = 0,$$

$$\frac{z_2}{\sqrt{-(c^2+\mu_1)}} = \frac{z'_2}{\sqrt{-(c^2+\mu_2)}}.$$

Nun setze man für μ_1 den einen Grenzwert: $\mu_1 = -c^2$ und für μ_2 den anderen: $\mu_2 = -b^2$. Es bleibt $\beta)$ bestehen und $\alpha')$ wird:

$$\alpha'')\quad \frac{x_1}{\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{x'_1}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad y'_1 = 0,\quad z_1 = z'_1 = 0,$$

$$\frac{x_2}{\sqrt{a^2-c^2}} = \frac{x'_2}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad y_2 = y'_2 = 0,\quad z_2 = 0.$$

Der Punkt $P_1(x_1, y_1, 0)$ ist dann ein beliebiger Punkt der Fokalellipse, der Punkt $Q_2(x'_2, 0, z'_2)$ ein beliebiger Punkt der Fokalhyperbel geworden. Die beiden Punkte: $P_2(x_2, 0, 0)$ und $Q_1(x'_1, 0, 0)$ liegen jetzt beide auf der x-Achse. Daher sofort:

$$P_2 Q_1 = \pm(x_2 - x'_1),\quad \text{also auch}\quad P_1 Q_2 = \pm(x_2 - x'_1)$$

oder nach α''):

$$P_1 Q_2 = \pm \left[x'_2 \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} - x_1 \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}} \right].$$

Dies ist die Formel 4), § 21 in veränderter Bezeichnung.

2. Führt man das Teilungsverhältnis ein:

$$\lambda = \frac{P P_2}{P_1 P_2} = \frac{Q Q_2}{Q_1 Q_2},$$

so wird:

$$\alpha) \quad \lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} = \frac{\xi_2 - k}{\xi_2 - \xi_1}$$

und hieraus, da $y_2 = z_1 = 0$, $\xi_1 = x_1 \frac{e}{a}$, $\xi_2 = x_2 \frac{a}{e}$:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2; \quad y = \lambda y_1; \quad z = (1 - \lambda) z_2;$$

$$k = x_1 \frac{e}{a} \lambda + (1 - \lambda) x_2 \frac{a}{e}.$$

Aus der ersten und letzten Gleichung folgt:

$$\beta) \qquad x \frac{a}{e} - k = \lambda x_1 \left(\frac{a}{e} - \frac{e}{a} \right);$$

$$x \frac{e}{a} - k = (1 - \lambda) x_2 \left(\frac{e}{a} - \frac{a}{e} \right).$$

Außerdem, wie eben gezeigt:

$$\gamma) \qquad y = \lambda y_1; \quad z = (1 - \lambda) z_2,$$

und da P_1 auf der Ellipse, P_2 auf der Hyperbel liegt:

$$\delta) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0; \quad \frac{x_2^2}{e^2} - \frac{z_2^2}{a^2 - e^2} - 1 = 0.$$

k soll gegeben sein. Betrachtet man $P_2 (x_2, 0, z_2)$ als fest, so sind aus β), γ), δ) die drei Größen x_1, y_1 und λ zu eliminieren. δ_2) enthält dieselben schon an und für sich nicht, aber auch nicht x und y. Ferner folgt aus β_2) und γ_2) sofort:

$$\varepsilon) \qquad \left(x \frac{e}{a} - k \right) z_2 - z \left(\frac{e}{a} - \frac{a}{e} \right) x_2 = 0.$$

Die noch fehlende Endgleichung zwischen x, y, z, x_2, y_2 findet man am besten, indem man aus β) und γ) oder noch einfacher aus α) die Kombination bildet: ($y_2 = 0$, $z_1 = 0$):

$$\frac{(x - x_2)^2 + y^2 + (z - x_2)^2}{(x_2 - x_1)^2 + y_1^2 + z_2^2} = \frac{(\xi_2 - k)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2}.$$

Die Nenner sind nach dem Korrespondenzprinzip einander gleich, also:

$$\eta) \qquad (x - x_2)^2 + y^2 + (z - z_2)^2 = \left(x_2 \frac{a}{e} - k\right)^2.$$

ε) ist die Gleichung einer (auf der xz-Ebene senkrecht stehenden) Ebene, η) ist die Gleichung einer Kugel um $P_2(x_2, 0, z_2)$ als Mittelpunkt. Also ist, wenn P_2 als fest betrachtet wird, der geometrische Ort von P ein Kreis.

Setzt man aber $P_1(x_1, y_1, 0)$ als fest an, so erhält man statt ε) und η) die folgenden Gleichungen:

$$\varepsilon') \qquad \left(x \frac{a}{e} - k\right) y_1 - y x_1 \left(\frac{a}{e} - \frac{e}{a}\right) = 0.$$

$$\eta') \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = \left(x_1 \frac{e}{a} - k\right)^2.$$

Der geometrische Ort für P wird also auch ein Kreis, aber seine Ebene steht diesmal auf der xy-Ebene senkrecht.

Sollen nun endlich P_1 und P_2 beide variieren, so sind alle fünf Größen x_1, y_1, x_2, z_2 und λ zu eliminieren. Am symmetrischsten verfährt man, wenn aus β_1), γ_1), δ_1) erst x_1 und y_1, aus β_2), γ_2) und δ_2) x_2 und z_2 fortgeschafft wird, was zu den beiden Gleichungen führt:

$$\frac{(xa - ke)^2}{(a^2 - e^2)^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} - \lambda^2 = 0,$$

$$\frac{(xe - ka)^2}{(a^2 - e^2)^2} - \frac{z^2}{a^2 - e^2} - (1 - \lambda)^2 = 0$$

und nun λ mittels der Identität eliminiert wird:

$$[\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 - 1]^2 - 4\lambda^2 (1 - \lambda)^2 = 0.$$

Die Dupinsche Zyklide ist also eine Fläche vierter Ordnung.

Dieselbe hat sehr merkwürdige Eigenschaften. Man achte vor allem auf die beiden Scharen von Kreisen, welche sich auf der Fläche senkrecht durchdringen. Außerdem bemerke man, daß in jeder Ebene ε) [bzw. ε')] zwei Kreise der zugehörigen Schar liegen, da ε) unverändert bleibt, wenn der Punkt $P_2(x_2, 0, z_2)$ durch den gegenüberliegenden Punkt $P'_2(-x_2, 0, -z_2)$ ersetzt wird. Ferner stellt ε), wenn $P_2(x_2, 0, z_2)$ variiert, ein Ebenenbüschel vor, dessen Ebenen

daher die Fläche sämtlich in zwei Kreisen schneiden. Endlich bemerke man, daß jede Kugel der Schar η) von jeder Kugel der Schar η' berührt wird, da die Zentrale $= P_1 P_2 = \pm(\xi_2 - \xi_1)$ und die beiden Radien $= \pm(\xi_2 - k)$ und $\pm(\xi_1 - k)$. Daraus folgt auch, daß $P_1 P_2$ auf der Zyklide in P normal steht.

Wenn $|k| > a$ (oder $|k| < e$), so kann $Q_2(\xi_2, 0, 0)$ [$Q_1(\xi_1, 0, 0)$] als Abbild eines festen Punktes P' der Fokalhyperbel (Ellipse) angesehen werden und die Fläche entsteht dann, wenn man die Verbindungslinien $P_1 P_2$ jedes Punktes der Ellipse mit jedem Punkte der Hyperbel über P_1 hinaus um $P_1 P'$ verlängert (bzw. verkürzt).

Am einfachsten wird die Zyklide, wenn $e = 0$, die Fokalellipse also zu einem Fokalkreis ausartet. Die Gleichungen ε') und η') werden dann:

$$xy_1 - yx_1 = 0, \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 = k^2.$$

Die Fläche entsteht also, wenn man um jeden Punkt des Fokalkreises eine Kugel mit dem Radius k beschreibt und diese Kugel durch eine Ebene schneidet, welche durch die z-Achse und den Mittelpunkt der Kugel geht. Mit anderen Worten: Sie entsteht durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Achse. Und die andere Kreisschar? Sie besteht offenbar aus den Schnitten parallel zum Fokalkreis.

Übrigens hat Dupin die Zyklide auf ganz anderem Wege erhalten, nämlich als eine Fläche, die von allen Kugeln umhüllt wird, welche drei gegebene Kugeln berühren. Jene Kugeln bilden eine unserer Scharen, etwa η'), während die drei gegebenen Kugeln sich als irgend drei Angehörige der anderen Schar (η) erweisen.

§ 22.

1. Es sei $l\,(\alpha, \beta, \gamma)$ ein Strahl von P, $l_1\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ der entsprechende Strahl von Q nach der Drehung, $l'_1\,(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1)$ derselbe Strahl von Q vor der Drehung. Dann besteht, da l'_1 und l senkrecht aufeinander stehen sollen, die Gleichung

$$1) \qquad \cos\alpha \cos\alpha'_1 + \cos\beta \cos\beta'_1 + \cos\gamma \cos\gamma'_1 = 0.$$

Nun stehen l'_1 und l_1 in der Verwandtschaft der Kongruenz, d. h. zwischen α_1, β_1, γ_1 und α'_1, β'_1, γ'_1 finden die drei Beziehungen statt:

$$2)\quad \begin{cases} \cos\alpha'_1 = a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\beta_1 + a_3\cos\gamma_1, \\ \cos\beta'_1 = b_1\cos\alpha_1 + b_2\cos\beta_1 + b_3\cos\gamma_1, \\ \cos\gamma'_1 = c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\beta_1 + c_3\cos\gamma_1, \end{cases}$$

wo die neun Koeffizienten:

$$a_1,\ a_2,\ a_3;\quad b_1,\ b_2,\ b_3;\quad c_1,\ c_2,\ c_3$$

mit den neun Koeffizienten irgend einer orthogonalen Transformation 3) oder 3'), § 3 identisch sein müssen.

Setzt man 2) in 1) ein, so entsteht 5), § 22 und zuletzt die Gleichung der erzeugten Fläche 7), § 22. Mit anderen Worten: Im vorliegenden Falle sind A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 identisch mit den neun Koeffizienten einer orthogonalen Transformation.

Durch Koordinatentransformation kann man sogar erreichen (indem man die Drehachse zur z-Achse macht), daß die Gleichungen 2) die einfache Form 3a), § 3 erhalten, d. h. daß:

$$3)\quad a_1 = \cos\varphi,\quad a_2 = -\sin\varphi,\quad b_1 = \sin\varphi,\quad b_2 = \cos\varphi,$$
$$a_3 = b_3 = c_1 = c_2 = 0,\quad c_3 = 1.$$

Die Gleichung 7) wird dann:

$$\cos\varphi\,[(x-a)(x-a_1) + (y-b)(y-b_1)]$$
$$+ \sin\varphi\,[(y-b)(x-a_1) - (x-a)(y-b_1)] + (z-c)(z-c_1) = 0.$$

Die Glieder zweiten Grades werden also:

$$\cos\varphi\, x^2 + \cos\varphi\, y^2 + z^2,$$

d. h. die erzeugte Fläche ist eine Umdrehungsfläche, und zwar ein (abgeplattetes) Ellipsoid, wenn $\cos\varphi$ positiv, ein Hyperboloid, wenn $\cos\varphi$ negativ und ein parabolischer Zylinder, wenn $\cos\varphi = 0$.

Hinterher zeigen auch die Gleichungen 20), § 14 für eine Umdrehungsfläche sich erfüllt, selbst wenn man nicht sofort die einfachen Formeln 3) ansetzt. Denn es ist, wenn $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$ usw. in 7):

$$a_{11} = a_1,\quad a_{12} = \frac{1}{2}(a_2 + b_1) \text{ usw.}$$

Vermöge der Formeln 4), 5) und 6), § 3 kann man nun beweisen, daß jeder der drei Ausdrücke in 20), § 14 gleich $\frac{a_1 + b_2 + c_3 - 1}{2}$ ist.

2. Macht man die Achse l des ersten Büschels zur x-Achse, so ist seine Darstellung:

$$1) \qquad y - kz = 0.$$

Da das zweite Büschel (mit der Achse l_1) auf das erste durch Kongruenz bezogen sein soll, so ist die entsprechende Darstellung:

$$2) \qquad y_1 - kz_1 = 0,$$

wo y_1 und z_1 aus y und z durch eine Koordinatentransformation 15), § 3 hervorgehen:

$$3) \quad y_1 = b + b_1 x + b_2 y + b_3 z, \quad z_1 = c + c_1 x + c_2 y + c_3 z.$$

Aus 1), 2) und 3) entsteht durch Elimination von k, y_1, z_1 die Gleichung der erzeugten Fläche:

$$4) \quad y(c + c_1 x + c_2 y + c_3 z) - z(b + b_1 x + b_2 y + b_3 z) = 0.$$

Es ist also hier:

$$5) \qquad a_{11} = 0, \quad a_{22} = c_2, \quad a_{33} = -b_3,$$

$$a_{23} = \frac{c_3 - b_2}{2}, \quad a_{31} = -\frac{b_1}{2}, \quad a_{12} = \frac{c_1}{2}.$$

Zur Entscheidung über die Art der Fläche bilde man s, t, Δ. Man findet:

$$s = c_2 - b_3,$$

$$t = -c_2 b_3 - \frac{(c_3 - b_2)^2 + b_1^2 + c_1^2}{4}$$

$$= -\frac{4 c_2 b_3 - 2 b_2 c_3 + (b_1^2 + b_2^2) + (c_1^2 + c_3^2)}{4},$$

$$\Delta = \frac{-c_2 b_1^2 + b_3 c_1^2 - (c_3 - b_2) b_1 c_1}{4}.$$

Da die Koeffizienten einer orthogonalen Transformation durch drei unabhängige Größen bestimmt sind, so scheint es fast, als ob zwischen s, t und Δ hier keine Beziehung abgeleitet werden kann. Anders wird aber die Sachlage, wenn man nach 4), 5) und 6), § 3 erst umformt.

Es ist:

$$2c_2b_3 - 2b_2c_3 = -2a_1,\quad b_1^2 + b_2^2 = 1 - b_3^2,\quad c_1^2 + c_3^2 = 1 - c_2^2$$

also:

$$t = -\frac{2c_2b_3 - 2a_1 + 1 - b_3^2 + 1 - c_2^2}{4} = \frac{(c_2 - b_3)^2 - 2(1 - a_1)}{4}.$$

Ferner setze man in den Ausdruck für Δ statt $-b_1c_1$ ein: $b_2c_2 + b_3c_3$ und ordne nach c_2 und b_3. Es wird:

$$\Delta = \frac{c_2(-b_1^2 - b_2^2 + b_2c_3) - b_3(-c_1^2 - c_3^2 + c_3b_2)}{4}$$

$$= \frac{c_2(b_3^2 - 1 + b_2c_3) - b_3(c_2^2 - 1 + b_2c_3)}{4}$$

$$= \frac{(c_2 - b_3)(-1 + b_2c_3 - c_2b_3)}{4} = -\frac{(c_2 - b_3)(1 - a_1)}{4}.$$

Nun hängen s, t, Δ nur noch von $c_2 - b_3$ und $1 - a_1$ ab. Eliminiert man diese beiden Größen, so entsteht die Bedingung:

$$6)\qquad 4ts - s^3 - 8\Delta = 0.$$

Sie ist so beschaffen, daß sie in bezug auf die ursprünglichen Koeffizienten a_{11}, $a_{12}\ldots$ homogen wird und stellt also eine wirkliche Bedingung für die erzeugte Fläche dar.

Sie muß also erfüllt sein. Und umgekehrt, wenn sie für eine Regelfläche zweiter Ordnung erfüllt ist, so läßt sich zeigen, daß sie (sogar auf unendlich viele Arten) durch kongruente Ebenenbüschel erzeugt werden kann.

Übrigens hat Übungsaufgabe 3, § 16 zu derselben Gleichung 6) geführt.

3. Legt man das Koordinatensystem wie in Aufgabe 10, § 4, so ist die Gleichung einer Ebene E durch l:

$$1)\qquad x\sin\varphi + y\cos\varphi - k\,(z - A) = 0$$

und einer Ebene E_1 durch l_1:

$$2)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi - k_1\,(z - A) = 0.$$

E und E_1 stehen senkrecht aufeinander [2 a), § 8], wenn:

$$3)\qquad \sin^2\varphi - \cos^2\varphi + kk_1 = 0.$$

Die Gleichung der durch die beiden Ebenenbüschel erzeugten Fläche entsteht also aus 1), 2), 3) durch Elimination von k und k_1. Sie wird:

4) $x^2 \sin^2\varphi - y^2 \cos^2\varphi + (z^2 - \Delta^2)(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi) = 0,$

oder:

4a) $$\frac{x^2}{\dfrac{\Delta^2(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)}{\sin^2\varphi}} + \frac{y^2}{\dfrac{\Delta^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{\cos^2\varphi}} + \frac{z^2}{\Delta^2} - 1 = 0.$$

Da die Koeffizienten von x^2 und y^2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist die Fläche zunächst (im allgemeinen) ein einschaliges Hyperboloid. Aber ein solches besonderer Art. Denn geht man auf die Form 4) zurück, so wird bei der Bezeichnung 7), § 15:

$$\lambda_1 = \sin^2\varphi, \quad \lambda_2 = -\cos^2\varphi, \quad \lambda_3 = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

also:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \text{d. h.} \quad s - 2\lambda_3 = 0.$$

Folglich auch:

$$(s - 2\lambda_1)(s - 2\lambda_2)(s - 2\lambda_3) = 0.$$

Entwickelt man diese Gleichung, so folgt aus 18), § 15:

5) $$4ts - s^3 - 8\Delta = 0,$$

also merkwürdigerweise dieselbe Gleichung, wie in der vorigen Aufgabe und in 3), § 16.

(Man zeige, daß die Ebenen der beiden Scharen von Kreisschnitten hier senkrecht auf l und l_1 stehen.)

4. Jede orthogonale Transformation läßt die Gleichung der Kugel unverändert. [Abbildung durch Kongruenz, bzw. durch Kongruenz und Symmetrie (§ 1).] Um andere kollineare Abbildungen der Kugel auf sich selbst zu finden, mache man ihre Gleichung erst homogen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2t^2 = 0$$

und transformiere, ohne x und y zu ändern, erst $z^2 - r^2t^2$ in sich selbst, d. h. setze:

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z^2 - r^2t^2 = z_1^2 - r^2t_1^2,$$
$$z = az_1 + bt_1, \quad t = cz_1 + dt_1.$$

Da $z^2 - r^2t^2 = (z + rt)(z - rt)$, so folgt entweder:

$$z + rt = k(z_1 + rt_1); \quad z - rt = \frac{1}{k}(z_1 - rt_1)$$

(wo k irgend eine Konstante ist), oder:

$$(z + rt) = k(z_1 - rt_1); \quad z - rt = \frac{1}{k}(z_1 + rt_1).$$

Im ersteren Falle wird:

$$z = z_1 \frac{k + k'}{2} + rt_1 \frac{k - k'}{2},$$

$$t = z_1 \frac{k - k'}{2r} + t_1 \frac{k + k'}{2}; \quad \left(k' = \frac{1}{k}\right)$$

(im anderen Falle ist nur t_1 mit $-t_1$ zu vertauschen), oder, wenn nun die Homogenität wieder aufgehoben, also x, y, z für $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ und dann $t_1 = 1$ gesetzt wird:

$$x = \frac{x_1}{N}, \quad y = \frac{y_1}{N}, \quad z = \frac{z_1 \frac{k + k'}{2} + r \frac{k - k'}{2}}{N},$$

wo:

$$N = z_1 \frac{k - k'}{2r} + \frac{k + k'}{2}.$$

Setzt man diese und die analogen Transformationen mit den orthogonalen Transformationen beliebig zusammen, so entstehen kollineare Abbildungen einer Kugel auf sich selbst, die nunmehr von sechs unabhängigen Größen, nämlich φ, v, δ [10), § 3], k und den Analogen k_1 und k_2 abhängen. Daß man aber auf diese Weise auch wirklich alle erhält, wie es tatsächlich der Fall ist, müßte durch eingehendere Forschungen erst gezeigt werden.

[Durch Einsetzen von 13), § 22 in die Kugelgleichung entsteht nach Fortschaffen des Nenners eine andere Gleichung zweiten Grades, die hier, von einem Faktor abgesehen (welchen man wegen des willkürlichen Faktors in den 16 Koeffizienten = 1 nehmen kann), mit der alten übereinstimmen muß, nur x_1 statt x usw. Es ergeben sich also 10 Gleichungen zwischen den 16 Koeffizienten. Folglich bleiben nur $16 - 10 = 6$ unabhängige Größen.]



